Math P. 722

Mathem.

Trigonometr.

p. 319

R

e. d. Pl. Scharl 1814.

Sphärische Trigonometrie

mit

möglichster Klarheit beschrieben

von

P. Michael Lory,

Benediktiner von Tegernsee,

der Gottesgelahrheit Doktor und Professor, Hochfürstl. Salzburgisch. geistlicher Rath; Prokanzler und Vice-rektor an der Salzburgisch. Universität, der Churfürstl. Akademie zu München Mitglied.

Mit V. Kupfertafeln.

Augsburg, 1783.

bey Eberhards Kletts sel. Wittwe und Franck.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Es ist mir nicht bewußt, und ich zweifle, ob die sphärische Trigonometrie, diese in astronomischen und geographischen Dingen unentbehrliche Wissenschaft, allein und von den übrigen mathematischen Theilen abgesondert, besonders in deutscher Sprache vollständig und ausführlich jemals an das Licht getreten sey. Man findet sie nur entweder in den kompendiarischen Elementarbüchern, oder in den großen Werken berühmter Astronomen. Dabey gestehen alle sowohl Lehrer, als Anfänger, daß dieser ma-

thematische Theil sehr schwer zu fassen ist; wie mir dann mehrere bekannt sind, die nach vieler angewandten Mühe endlich aus Verzweiflung durchzusetzen die auch sonst vortreflichsten Werke aus der Hand geleget haben. Es ist kein Wunder, denn jene kleinen Elementarbücher sind meistens so kurz, so abgebrochen, so unvollständig in diesem Fache, daß es in der That unmöglich hält, ohne mündlichen Unterricht und Ersatz des abgängigen einen vollkommenen Begriff dieser Lehre zu überkommen, und beynahe nur einen einzigen neu aufstoßenden Fall mit Zuversicht und ohne Zweifelhaftigkeit aufzulösen: weil man da ohne deutliche Kenntniß der Theorie nicht zu bestimmen im Stande ist, von was Art die Winkel sowohl, als die Seiten sogar auch an geradwinklichten Triangeln sich befinden. Jene Gelehrte, die von dieser Wissenschaft in ihren großen Werken handeln, scheinen für

sich selbst allzu erhaben gewesen zu seyn, als daß sie sich bis zu den Anfängern wollten herablassen, um alle die Anmerkungen beyzusetzen, welche diesen ihre Beschwerlichkeiten aus dem Wege räumeten, und einen gebahnten Steig offen ließen. Zudem sind bey ihnen die vorgezeichneten Figuren so auf eine Art entworfen, daß es beynahe zur Unmöglichkeit wird, jenes im Gemüth sich vorzubilden, was sie vorzubilden verzeichnet sind.

Diese Ursachen bewogen mich, dieses Werk zu verfassen. Ich wollte die sphärische Trigonometrie ganz allein herausgeben; theils, weil die andern hierzu vorhinein erfoderlichen mathematischen Kenntnisse in andern Büchern bereits klar genug zu finden sind, und also meiner Erklärung nicht bedürfen: theils, damit man mit geringem Kosten sich anschaffen möchte, was man mit Beyschaffung der kostbaresten Werke ohne un-

unsägliche Mühe und Geduld durch sich selbst dennoch nicht finden kann. Dabey wollte ich so eine Ordnung und Lehrart beobachten, wodurch ein jeder, dem die geradlinichte Trigonometrie geläufig ist, ohne Lehrmeister und aus sich selbst unschwer durchzudringen im Stande ist; weil solche Anmerkungen und Zergliederungen eingemenget sind, welche die gewöhnlichen Dunkelheiten und Zweydeutigkeiten aus dem Grunde heben. Deßwegen habe ich sogar anstatt der sonst angenommenen Haupttheoremen zwey neue §. 85. und 88. angesetzt. Endlich die Beschwerniß zu tilgen, die von Seite der Figuren herkömmt, habe ich jene Art des M. Deparcieux, und zwar noch ausführlicher und faßlicher anzuwenden mich beflissen, wodurch die Triangel sammt den Sectoren der Seiten sich darstellen, welche Art auf einmal unendlich mehr Licht anzündet, als wenn man nur krumme Bögen

auf

auf der Ebene des Papieres vormalet, welche mit der Natur der Triangel an sich selbst gar keine Aehnlichkeit haben. Wie gefließen ich darnach strebte, dem Leser alle Beschwerlichkeiten verschwinden zu machen, wird man daraus wahrnehmen, weil ich mich durch und durch auf gewisse Modelle beziehe, woran man alles mit den Augen greifen kann: Modelle, welche, wenn man sie solid und zierlich zu haben verlanget, der unvergleichliche, erst jetzt verstorbene Künstler, welcher der Mechanik unsterblich seyn sollte, der berühmte Herr Brander kurz vor seinem Abscheiden zu entwerfen, und gewiß nach seiner Art zu erweitern, und zu vervollkommnen sich freymüthig entschlossen hat: anjetzt aber dessen würdiger Nachfolger Herr Höschel aus dem Branderischen Laboratorio zu verfertigen gesonnen ist.

Meh-

Mehrers will ich da nicht beysetzen. Ich getraue mir zu hoffen, daß diese Schrift unter die nützlichen solle aufgenommen werden, zumal bey den dermaligen Zeiten, wo alle Großen der Erde ihr ganzes Augenmerk auf die Schiffahrt zu Ausbreitung des Handels hinwenden, wozu denn eine weit ausgebreitetere Geflieſſenheit über die Astronomie und der dazu unumgänglich erfoderlichen sphärischen Kenntnisse nothwendig ist, als daß sie nur auf die prächtigen Sternwarten eingeschränkt verbleiben dürften.

Erster Theil.

Theorie der sphärischen Trigonometrie.

Erstes Hauptstück.

Allgemeine Begriffe der Sphäre.

§. 1.

Die sphärische Trigonometrie ist eine Wissenschaft jene Triangel zu Zergliedern, welche am Umfang der Sphäre, oder einer Kugel mittels Durchkreuzung dreyer Zirkel entstehen, dessen jeden seine Zirkelfläche, wenn die Kugel nach derselben durchschnitten wird, durch den Mittelpunkt

der Kugel durchgehet, und sie selbst in zwo gleiche Halbkugeln theilet.

§. 2. Die Sphäre ist ein bauchigter Körper, auf dessen Oberfläche ein jeglicher Punct von einem gemeinschaftlichen Punkte ihrer Mitte gleichweit entfernt ist.

§. 3. Jener mitlere Punkt heißt Centrum: und jede Linie, welche durch den Mittelpunkt von einem Ende bis zum andern der Sphäre gerad durchgeht, heißt Diameter, oder Durchmesser der Sphäre: dessen Hälfte aber heißt Semidiameter, Halbmesser, oder Radius.

§. 4. Die Kugel entspringt, wenn man sich vorstellet, als ob die Fläche eines Halbzirkels A K B Fig. 1. um den Diameter A B sich umdrehete, und inzwischen im ganzen Zwischenraum, den sie durchwandert, ein Merkmal seiner selbst zurückließe.

§. 5. In diesem Betracht heißt der Halbzirkel A K B der Zeugzirkel der Sphäre.

§. 6. Aus eben dieser Rücksicht der Entstehung einer Sphäre kam, daß der Diameter A B des Zeugzirkels die Achse der Sphäre genennt ward, weil er sich um selben, wie ein Rad um eine Achse umwälzte. Die äußersten Punkte A und B des Diameters des Zeugzirkels heißen die Pole (Poli) der Kugel.

§. 7.

§. 7. Ein Halbzirkel hat 180 Grade: dahero steht der mittlere Zwischenpunkt K an der Peripherie von A und B um 90° entfernt, das ist, AK und BK sind Quadranten und der Radius CK ist perpendicular zum Diameter AB.

§. 8. Während als der Halbzirkel AKB sich umwälzt, bleibt der Punkt K beständig in seiner Mitte der Peripherie, und folglich auch bleibt der Radius CK perpendicular, der Punkt K steht demnach ringsherum 90° von A und B entfernt.

§. 9. Der Punkt K am perpendicular Radius CK beschreibt durch die Umdrehung des Halbzirkels AKB einen Zirkel KDI; dessen jeder Punkt von A und B 90° oder um einen Quadranten entfernet ist, §. 8.

§. 10. Der Zirkel KDI, der von seinen Polen A und B 90° entfernt ist, heißt ein gröster Zirkel der Kugel: denn nimmt man Fig. 2. andere Linien als e m oder g o an, die am Diameter AB des zeugenden Halbzirkels AKB perpendicular, aber kleiner sind als der Radius CK: so beschreiben sie bey der Umwälzung zwar auch Zirkeln m f l, und o h n, allein diese sind kleiner als der Zirkel KDI. Nämlich e m und o g sind Sinus der Bögen m A, und o A, welche kleiner sind als der Quadrant KA, dessen CK der Sinus ist: weil dann CK der Sinus totus, oder der Radius der Sphäre selb-

sten ist, so folget, daß aus dessen Umwälzung ein Zirkel entstehet, über den kein größerer an der Kugel seyn kann.

§. 11. Von einem jeglichen Punkte am Umfang der Kugel kann durchs Centrum eine gerade Linie zum entgegenstehenden Endpunkt gezogen werden. Demnach giebt es eben so viel Diameter, deren entgegen stehende Punkte um lauter Halbzirkel, oder 180° von einander stehen. Auf diesen Halbzirkeln können allerseits ihre perpendiculare Radii aus dem Centrum der Kugel stehen, deren Ende abermal von den Endpunkten ihrer Diametern 90° entfernet sind, und wenn sie um ihre eigene Diameter umgedrehet würden, ihre eigene Zirkel beschreiben, die von den Endpunkten ihrer Diameter um 90° ringsum entfernt wären. Z. B. Es sey Fig. 1. I K ein Diameter, D C sein Perpendicularradius: so werden die Punkte I und K von D um 90° abstehen, und wenn der Halbzirkel I D K sich um den Diameter I K umdrehete, würde der Punkt D einen grösten Zirkel D A, B D beschreiben.

§. 12. Hieraus folget: Erstens, daß es an der Sphäre so viel Achsen und Pole gebe, als es entgegenstehende Punkte an ihrem Umfang giebt. Zweytens, daß eben so viel gröste Zirkel darauf möglich sind. Drittens, daß ein jeder gröster Zirkel eine andere Achse und andere zween Pole

habe,

habe, die von ihm um Quadranten ringsum entfernt sind.

§. 13. Wenn der Radius CK Fig. 1. der auf die Achse AB perpendicular aufstößt, um dieselbe Achse sich umdrehet: so beschreibt er die Fläche des grösten Zirkels KDI: denn inzwischen der Punkt K die Circumferenz durchläuft, indessen durchstreicht der Radius CK den Zwischenraum des Umkreises und des Mittelpunkts C: folglich die Fläche eines Zirkels, der ein gröster der Kugel ist, §. 11.

§. 14. Daher folget, daß jede Achse perpendicular ist zur Fläche desjenigen Zirkels, dessen Radius perpendicular ist zu der nämlichen Achse.

§. 15. Jeder Diameter der Kugel streicht durch ihr Centrum, und theilet sich alldort in seine Helften: Es ist auch die Fläche eines jeden grösten Zirkels in Mitte seiner Achse befindlich, §. 11. Weil denn eine jede Achse zugleich ein Diameter der Kugel ist: so ergiebt sich, daß eine jede Fläche eines grösten Zirkels durch das Centrum der Kugel durchstreiche, und daß demnach alle nur mögliche gröste Zirkel der Kugel einen einzigen, und gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

Schol. Dieweil die sphärische Trigonometrie nur allein mit denjenigen Triangeln sich abgiebt, die aus der Durchkreuzung solcher Zirkel entstehen, de-

ren Flächen durchs Centrum der Kugel durchstreichen, §. 1. das ist: deren Seiten oder Bögen zu größten Zirkeln als deren Segmente gehören, so wird es nicht unnütz seyn, jene Zirkel hier zu benamsen, durch deren Durchkreuzung und verschiedenen Lage auf der Weltkugel die meisten sphärischen Triangel entstehen, welche der Gegenstand der sphärischen Trigonometrie ausmachen. Sie sind 1. der Horizon. 2. Der Aequator. 3. Der Meridian. 4. Die Ecliptik. 5. Der Colur der Sonnenwenden. 6. Der Colur der Taggleichen. 7. Die Declinationzirkel. 8. Die Breitenzirkel. 9. Die Längenzirkel. 10. Die Vertical- oder Azimutalzirkel. 11. Die Stundenzirkel. 12. Die Zirkel des neunzigsten Grades.

Des Horizons-Achse ist ein Diameter der Sphäre, der vom Zenith zum Nadir sich senket, dessentwegen auch die Punkte Zenith und Nadir seine Pole sind.

Des Aequators Achse ist ein Diameter der Sphäre, der vom arktischen zum antarktischen Punkte streichet, welche zween Punkte die Pole des Aequators sind, auch die Weltpole heißen, weil um diese Achse alle Himmelsbewegungen geschehen.

Des Meridians Achse ist ein Diameter der Sphäre, der vom Punkt Ost zum Punkt West geht, welche Punkte denn auch seine Pole sind.

Die Pole der übrigen benannten grösten Zirkeln sind überhaupt zween solche Punkte, die von eines

jeden Circumferenz um 90° auf der Kugel von jedem insonderheit entlegen sind.

Zweytes Hauptstück.

Begriffe von den sphärischen Winkeln.

§. 16.

Ein sphärischer Winkel ist, der zwischen zweenen Halbzirkeln enthalten ist, wenn man einen grösten Zirkel nach einem Diameter zusammen legt, und hernach verschieden von einander thut.

§. 17. Um von sphärischen Winkeln eine klare Vorstellung zu überkommen stelle man sich Fig. 1. vor, als wäre die Fläche des Zirkels A I K B also längs des Diameters A B zusammen gelegt, daß der Halbzirkel A I B auf dem andern A K B völlig aufliege. In diesem Fall ist zwischen ihnen kein Winkel: weil zwischen ihnen auch kein Raum ist, und nirgens von einander abstehen.

§. 18. Jetzt aber bleibe der Halbzirkel A K B unbeweglich, der andere aber A D B bewege sich an dem gemeinschaftlichen Diameter A B, von mit seiner Circumferenz vom untern von K gegen I: so werden die zween Flächen der Halbzirkel von einander sich entfernen, und nur am Diameter A B aneinander anstossen. Diese Entfernung wird um so viel grösser werden, um wie viel die bewegte Fläche von der unbewegten weiter wird entfernet

werden. Der Winkel zwischen den zweenen Halbzirkelflächen wird immerdar zunehmen, bis der bewegte Halbzirkel A D B den andern A I B wird erreichet haben, und alsdenn mit dem ersten A K B einen ebenen ganzen Zirkel ausmachen.

*) Hiebey ist wohl zu beobachten, daß die Neigung der Flächen gegeneinander oben am Punkt A und unten am Punkt B keine andere sey, als welche diese Flächen selbst zwischen D und K bey jeder Entfernung haben, und demnach der Winkel D A K oder D B K allemal gleich sey der Entfernung der zween Halbzirkelflächen nach ihrem Ganzen oder nach dem Abstand des Bogens K D, oder der zweenen Perpendicularradien C K und C D, kurz dem Winkel K C D.

§. 19. Dieses noch klärer zu geben, so stelle man sich vor, als wenn die Halbcircumferenz K D I, welche der Punkt D am Halbzirkel A D B bey vorgemeldeter Bewegung von K gegen I beschreibt, in seine 180 Grade abgetheilt wäre: Nachmals stelle man sich vor, als wenn der Halbzirkel A D B an eine aus diesen Abtheilungen angelanget wäre, so wird durch diesen Theil die Größe der Neigung der zwoen Flächen, oder des Winkels bestimmen.

§. 20. Da die bewegliche Fläche A D B in die Mitte des Bogens K I versetzet wird: so hat der Punkt D 90 Grad von K: weil der ganze Bogen

gen K I 180 zählet: demnach ist dort die Neigung der Flächen oder ihr Winkel K C D ein gerader Winkel. Aber ehe die bewegliche Fläche jene Mitte erreichet, so ist die Neigung der Flächen noch unter 90°, und demnach ein spitziger Winkel. Wenn aber die bewegliche Fläche von K über die Mitte des Bogen K I gelanget, so übersteigt die Neigung der Flachen 90°, und entsteht dahero ein stumpfer Winkel.

§. 21. Aus diesen Beobachtungen folget erstens, daß der sphärische Winkel K A D, welcher an einem Ende des Diameters A B zwischen zwoen Bögen gröster Zirkeln entsteht, Fig. 1. gleich sey dem Winkel K B D am andern Ende des Diameters: also auch I A D = I B D: denn die Neigung der Flächen ist durch und durch die nämliche.

§. 22. Es folget zweytens, daß die sphärische Triangel für ihr Maaß haben einen Bogen, der von ihrem Spitz um einen Quadranten entfernt ist, §. 19. und von einer Fläche zur andern gezogen ist, als Fig. 3. ist der Bogen A E das Maaß des Winkels A D E, wenn die Bögen A D und E D Quadranten sind, und demnach der Spitz D des Winkels A D E der Pol ist des Zirkels A E B. Auf gleiche Weise mißt Fig. 1. der Bogen D K den Winkel D A K, wenn A D und A K Quadranten sind, und D I mißt den Winkel D A I.

*) Weil Fig. 1. der Bogen D K das Maaß ist des sphärischen Winkels D A K, und eben auch des geradlinichten Winkels D C K, der zwischen zweenen Radiis enthalten ist, welche auf dem gemeinschaftlichen Diameter A B perpendicular stehen, und zugleich zu jenen zwoen Flächen als Radii gehören, durch deren Neigung der sphärische Winkel D A K entspringt, so ist offenbar, daß jeder sphärische Winkel gleich ist einem geradlinichten, welcher entsteht, wenn man annimmt, daß aus dem Spitz des sphärischen Winkels ein Diameter durch das Centrum der Kugel gezogen werde, und aus eben dem Centrum zween Radii nach den zwoen Seiten des Winkels hinausreichen, wenn diese zwo Seiten so verlängert, oder verkürzet werden, daß beyde insbesondere Quadranten seyen.

§. 23. Es folget drittens, daß die anstossenden sphärischen Winkel K A D und D A I (Fig. 1.) wechselweise die Suplementen sind zu 180°: denn der Bogen K D I als das Maaß aller beyder (§. 22.) ist 180° (§. 19.)

§. 24. Es folget viertens, daß die am Scheitelspitz entgegenstehende Winkel (wenn nämlich dessen Seitenbögen über jenen hindurch verlängert werden) gleich sind. Z. B. die Winkel A D E und B D F (Fig. 3.) sind gleich: wie denn auch E D B und A D F: denn die Neigung der Flächen, welche einen

einen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben, bleibt nach dem Durchschnitt wie vor demselben.

§. 25. Es folget fünftens, daß der gemeine Durchschnitt zweener größter Zirkel an der Kugel ein Diameter ist, der durchs Centrum der Kugel und alle beyde Flächen durchgeht: denn A B (Fig. 1.) bleibt der gemeinschaftliche Diameter. Die Fläche A D B sey gegen der Fläche A K B wie immer geneiget.

§. 26. Es folget sechstens, daß ein größter Zirkel, der einen andern größten Zirkel perpendicular durchkreuzet, durch die Pole dieses zweyten Zirkels durchstreichet: denn, wenn Fig. 1. die Fläche A D B perpendicular aufrecht steht über die Fläche des Zirkels A K B I, so steht sein mittlerer Punkt D = 90° auch perpendicular über den Diameter I K. Derohalben steht der Punkt D von allen Punkten des Zirkels A K B I 90° oder nach Quadranten entfernet, und ist als der Punkt D sein Pol. §. 7.

§. 27. Es folget siebentens hinwieder, wenn ein größter Zirkel auf der Kugel durch die Pole eines andern durchstreicht, daß jener zu diesem perpendicular steht. Eben so, wenn mehrere Zirkel durch die Pole eines andern durchgehen, so sind jene alle perpendicular zu diesem. Z. B. Es sey Fig. 3. der Punkt D der Pol des Zirkels A E B F, durch welchen die Zirkel

kel A D B und E D F durchgehen, so werden alle diese beyde auf jenem perpendicular stehen, und perpendicular durchschneiden. Gleichfalls, wenn ein Zirkel durch die Pole eines andern perpendicular durchgeht: so wird auch der letztere durch die Pole des erstern durchstreichen. Z. B. Fig. 1. Wenn der Zirkel A D B durch die Pole des Zirkels A I B K perpendicular streichet, so streicht auch dieser hinwieder durch die Pole K und I des Zirkels A D B.

§. 28. Es folget achtens, daß alle Bögen die zwischen dem Umkreis eines Zirkels und dessen Polen seyn können, lauter Quadranten sind: denn, wenn Fig. 1. der Quadrant A K um A den Pol des Zirkels K D I umgedreht wird, so bleibt er immer ein Quadrant.

§. 29. Es folget neuntens, daß wenn z. B. Fig. 1. ein Bogen K D aus A dem Vertex des Winkels als dem Pol jenes Bogens (mit Verlängerung der Seitenbögen des Winkels, damit sie Quadranten werden, wenn sie zu kurz wären) beschrieben wird, dieser Bogen K D das Maaß des Winkels K A D ist: denn dieser Bogen K D ist ein Segment des Zirkels, welches die Neigung der Flächen bestimmt. §. 19.

§. 30. Es folget zehntens, daß das Maaß eines geraden Winkels ein Quadrant zwischen zweenen Quadranten: daß Maaß eines spitzigen Winkels

kels ein kleinerer Bogen zwischen zweenen Quadranten: und das Maaß eines stumpfen Winkels ein grösserer Bogen zwischen zweenen Quadranten ist.

§. 31. Es folget eilftens, daß der Basis eines Winkels (das ist, die ihm im Triangel entgegenstehende Seite) das Maaß des Winkels ist, wenn die zwo übrige Seiten, die auf dem Basis stehen, und den Winkel einschließen, Quadranten sind. Hingegen aber, daß in einem Triangel die dem Winkel entgegenstehende Seite sein Maaß nicht ist, wenn die ihm anliegende zwo Seiten keine Quadranten, und zwar jeder insbesondere, sind.

§. 32. Es folget zwölftens, daß auf der Kugel ein gröster Halbzirkel mit einem andern grösten Bogen, der aber kleiner ist als ein Halbzirkel, sich nicht anschließen kann: denn die zweenen Bögen, damit sie sich anschließen, müssen an den beyden Enden eines gemeinschaftlichen Diameters zusammen laufen; indem alle Flächen gröster Zirkeln durch das Centrum der Sphäre durchkreuzen: weil denn aber ein Bogen, der kleiner ist, als ein Halbzirkel seines Diameters Ende nicht erreichet, so kann ein solcher an den gemeinsamen Diameter, und an dessen Halbzirkel sich nicht anschließen.

§. 33. Was noch immer ist gesagt worden, und auch fürohin wird gesagt werden, gehet alles auf solche Zirkel, Halbzirkel, Bögen der grösten

Zirkel

Zirkel der Sphäre: denn mit jenen Zirkeln, deren Flächen durch den Mittelpunkt der Sphäre nicht durchstreichen, das ist, mit kleinern Zirkeln auf der Kugel, oder mit ihren Theilen giebt sich die sphärische Trigonometrie nicht ab.

Drittes Hauptstück.

Begriffe von den sphärischen Triangeln.

§. 34.

Ein sphärischer Triangel ist, der am Umfang der Sphäre aus dreyen sich aneinander durchschneidenden Bögen entsteht, welche Segmente sind dreyer größter Zirkel.

§. 35. Gleichwie durch Anstossung zweener Bögen ein sphärischer Winkel entsteht: also entspringt durch den Durchschnitt eines dritten Bogens durch zween andere, wenn er außer jenem Punkt ihrer Vereinbarung sich befindt, ein sphärischer Triangel. Gleichwie aber die Flächen zweener Bögen, die einen Winkel ausmachen, Segmente sind größter Zirkeln, die durch das Centrum der Sphäre gehen: also muß auch der dritte Bogen ein Segment seyn so eines größten Zirkels, daß dessen Fläche durchs Centrum der Sphäre durchschneidet. Derowegen kann man einen jeden sphärischen Triangel so auf eine Art betrachten, daß aus den Sectoren seiner dreyen Seiten oder Bögen eine Pyramide

mide entsteht, deren Spitz im Centrum der Kugel befindlich ist: denn es sey z. B. Fig. 1. der Triangel A K D. Wenn man von einem jeden Spitz der dreyen Winkel A, K, D, nach den Centrum C die Halbdiameter A C, K C, D C zieht, so entstehen drey Sectoren (der dreyen Zirkeln, deren Bögen den Triangel ausmachen) als nämlich der Sector A C K für den Bogen A K, der Sector K C D für den Bogen K D, und der Sector D C A für den Bogen D A: und man hat eine Pyramide A K C D, deren Fußgestell oder Basis ein bauchigter Theil ist der Sphäre, der nämlich zwischen den dreyen Bögen oder Seiten des Triangels A K D enthalten: deren Spitz im Mittelpunkt C der Kugel, und deren Seiten die drey Sectoren A C K, K C D und D C A ausmachen.

*) Die Erfahrung sowohl bey mir selbst, als bey andern hat mich belehret, daß diese Art die sphärischen Triangel sammt ihren Sectoren zu betrachten, unaussprechlich viel zu Erleichterung unserer Trigonometrie beytrage, dessentwegen werde ich mein ganzes Werk darauf bauen. Diesen Vortheil bin ich dem vortrefflichen Werke des M. DeParcieux schuldig.

**) Es ist aber noch eine Anmerkung, die ich noch in keinem Autor gefunden, daß nämlich jeder sphärischer Triangel, von was Gattung er immer

ist,

ist, in dem Umfang einer Halbkugel enthalten ist. Diese Beobachtung ist aber darum höchst wichtig, weil sie der Einbildung vorbauet, welche sich bey solchen Triangeln irrig einmenget, die aus lauter stumpfen Winkeln, und aus dreyen Bögen bestehen, deren jeder über einen Quadranten enthält, als ob selbe von einer in die andere Halbkugel hinüber reicheten: auch von darum, weil wir durch diese Beobachtung in Stand gesetzt werden, in Figuren alle Arten der so manigfältigen sphärischen Triangel vor Augen zu stellen: weil an einer Kugel niemals mehr als die Hälfte kann gesehen, und noch weniger auf der Ebene des Papiers entworfen werden. Nun denn, so wollen wir den Ursprung der Triangel aller Art an Schnitten einer Halbkugel betrachten.

§. 36. Wenn an einer Halbkugel zween Schnitte übers Kreuz, wie immer, gegen ihrem Centrum geschehen, so entstehen allemal vier Pyramiden und vier sphärische Triangel.

§. 37. Es sey Fig. 1. eine Halbkugel A I B K D und das Centrum C: Nun gehe ein Schnitt nach dem Halbzirkel A D B C: der andere Schnitt sey I D K C, so hat man vier Pyramyden, als A D K C, K B D C, I D B C, I D A C: und vier Triangel, als: A K D, K D B, I D B, I D A. Und zwar, wenn die zweenen Schnitte perpendicular so wohl

unter

unter einander, als auf den Zirkel A I B K stehen; so sind alle diese vier Triangel gleichseitige und Quadrantaltriangel: denn z. B. im Triangel A D K sind die drey Winkelspitz die Pole ein jeder der entgegenstehenden Seite A für D K: D für A K: und K für A D; weil die Schnitte untereinander perpendicular sind: Eben daher sind die drey Seiten drey Quadranten, und alle drey Winkel gerade Winkel.

Dieses wird noch klärer erscheinen, wenn man eine jede Seite der Triangel sammt seinen Sectoren betrachtet: denn der Bogen A K hat zum Sector A C K, dessen Radii perpendicular sind. Eben so verhält es sich mit dem Sector K C D des Bogens K D, und mit dem Sector A C D des Bogens A D: denn in jedem dieser Sectoren sind die Radii gegeneinander perpendicular: demnach sind die Bögen A K, A D, D K von 90°; das ist, sie sind drey Quadranten, und eben darum sind die drey Winkel A, D, K gerade Winkel oder 90°, weil sie die Pole sind gedachter Bögen, und weil supponiert wird, daß die Schnitte gegeneinander perpendicular gehen.

*) Indem die sphärische Figuren, wenn sie auf dem ebenen Papier entworfen werden, optisch verstellet werden: so wird jenem, der der perspectivischen Vorstellungen ungewohnt ist, zweifelhaft

scheinen, was itzt über die erste Figur ist gesagt worden. Damit nun dieser Anstand gehoben werde, so bereite man sich nach Fig. ** eine sehr einfältige Maschine aus Charten = oder nur in etwas dickem Papier, man schneide einen ganzen Zirkel, und zween halbe Zirkel aus dem Papier. Im Zirkel durchlöchere man zwo Ritze A und B, in welche die an einem Halbzirkel vorspringende Lappen A, B können hineingeschoben und darinnen befestiget werden. An eben diesem Halbzirkel QEO schneide man zween Ritzen ED und GF aus, so daß die Ausschnitte von der Peripherie gegen dem Centrum C zugehen. Am andern Halbzirkel XEZ mache man auch zween Einschnitte CF und CD vom Centrum C gegen der Peripherie, wie es die Figur klar anzeiget.

** Mittels dieser einfachsten papierenen Vorsehung kann alles dem Aug offenbar dargestellt werden, was in der 1. 3. 4. 5. 6. 7. 8. Figur, ja fast in der ganzen sphärischen Trigonometrie vorzustellen ist, und sonst die Einbildung perspektivisch betriegt.

*** Um dann durch diese Maschine vorzustellen, was im §. 37. ist gesagt worden, so stecke man erstens die Lappen A und B des Halbzirkels QEGO in die Ausschnitte A und B des Zirkels WQVO. Nachmals nehme man den Halbzirkel XEZ: stecke dessen Ausschnitt CD in den Ausschnitt

schnitt E D des vorigen Halbzirkels Q E O, und verschiebe ihn auf solche Weise, daß der Diameter X Z des Halbzirkels mit dem Diameter W V des Zirkels übereinskomme. Diese Fügung der Maschin wird bis zum Greifen vorstellen, was im §. 37. ist gesagt worden.

§. 38. Wenn die zween Schnitte A D B und E D F (Fig. 3.) an der Halbkugel also geschehen, daß beyde durch den Pol D des Zirkels A E B F durchgehen, und folglich auf ihn perpendicular auffallen, aber unter ihnen selbst schräg gemacht werden, so entstehen abermal vier Pyramiden und vier Triangel, deren aber nur zween und zween, die nämlich am Vertex D entgegenstehen, gleich sind: das heißt, der Triangel A D E ist gleich dem Triangel F D B: und so auch ist A D F = E D B: aber diese beyde sind jenen beyden nicht gleich. Uebrigens sind alle viere gleichschenklicht, und hat ein jeder zween Quadranten (weil der gemeinsame Durchschnitt durch den Pol D des Zirkels A E B F durchstreicht) und zween gerade Winkel (weil die beyden Schnitte auf jenen Zirkel perpendicular gemacht worden) nebst einem schiefen Winkel bey D; weil die Schnitte gegeneinander schief supponiert worden sind. Es ist nämlich der Winkel bey D in den Triangeln A D E und F D B spitzig, und in den Triangeln E D B und A D F stumpf.

Betrachtet man die Sectoren: so sind A D C: E D C: B D C: F D C Quadranten. Aber A E C = F B C sind kleiner, und E B C = F A C sind größer als Quadranten.

*) Diese Fig. 3. in der Maschin des §. 37. bey *** vorzustellen, darf nach dortiger Zusammensetzung nur der Diameter X Z des Halbzirkels um etwas von dem Diameter W V des Zirkels abgewendet werden.

§. 39. Wenn Fig. 4. ein Schnitt E A Q auf den Zirkel F E B Q der Halbkugel perpendicular steht, der andere Schnitt F A B aber zur Fläche des Zirkels sowohl bey B und F: als auch zur Fläche des ersten Schnittes F A B bey A schief durchstreicht: so entspringen abermal vier Pyramiden, und vier Triangel, deren aber keiner dem andern gleich ist: die Triangel sind AQB: AEB: AEF: AQF. Doch aber ist in einem jeden einer ein gerader Winkel: dort nämlich bey Q und E, wo der erste Schnitt perpendicular durch den Zirkel geht.

Betrachtet man die Sectoren dieser Triangel, so hat man zum Beyspiel durch den Triangel E A B die Pyramide E A B C: dabey ist des Bogens A B Sector A C B: des Bogens E B sein Sector ist E C B, und des Bogens E A Sector ist E C A.

Vergleichet man diese Sectoren mit ihren Bögen, so erhellet, das diese Bögen das Maaß sind

der Winkel der Sectoren bey C: denn E B mißt den Winkel E C B; A B mißt den Winkel A C B und E A mißt den Winkel E C A.

Vergleichet man auch noch die Neigungen welche die Flächen der Sectoren untereinander haben, so ergiebt sich, daß diese Neigungen die Winkel ausmachen, welche die Bögen selbst untereinander machen: denn die Bögen mit ihren Sectoren genommen, sind Theile gröster Zirkeln, und ein sphärischer Winkel entspringt durch die Neigung gröster Zirkel. Ueberdas wird man diese Neigungen messen können, wenn aus jedem Vertex eines jeden Winkels als einem Pol zwischen seinen Bögen (die ihn einschließen und die verlängert werden müssen, oder verkürzet, damit sie Quadranten werden) ein Bogen eines grösten Zirkels gezogen wird.

*) Die Vorstellung der Fig. 4. geschieht in der Maschin Fig. * *. Wenn der Halbzirkel Q E O auf dem Zirkel W Q V O perpendicular eingesetzt, und nachmals der Spalt C F des anderen Halbzirkels in den Spalt G F des vorigen hineingeschoben wird.

**) In eben der Fig. 4. zeiget die Pyramide A B Q C, welche aus dem Triangel A Q B entsteht, durch ihre Sectoren A C B: A C Q: Q C B: daß alle drey Bögen A B: A Q: B Q kleiner sind als Quadranten. Wie aber die Winkel oder die Neigung dieser Sectoren durch Bögen kann bestimmet werden, ist erst gesagt worden.

***) In der nämlichen Fig. 4. entspringt aus dem Triangel A E F sammt seinen Sectoren die Pyramide A E F C. Wie aber aus den Sectoren die Größe der Bögen, und aus den Neigungen der Sectoren die Winkel sich vorzustellen sind, ist aus bisher gemeldetem genugsam abzunehmen.

§. 40. Vergleichet man alle Triangel, oder auch die Pyramiden, die aus bisher gemeldeten Durchschnitten der Halbkugel (§. 37. 38. 39.) entstehen: so zeigt sich, daß erstens Fig. 1. es Triangel gebe, in denen alle drey Seiten Quadranten, und alle drey Winkel gerade Winkel sind.

Zweytens: Daß es Fig. 3. Triangel gebe, deren zwo Seiten Quadranten mit zwenen geraden Winkeln gebe, bey denen die dritte Seite entweders kleiner als ein Quadrant, auch der entgegengesetzte Winkel spitzig: oder aber größer als ein Quadrant mit einem stumpfen entgegengesetzten Winkel ist.

Drittens: Daß es Fig. 4. Triangel giebt, worinnen ein gerader und zwey spitzige Winkel, alle drey Seiten aber kleiner sind als Quadranten. Z. B. A Q B.

Viertens: daß es Triangel giebt, in denen ein gerader und zwey stumpfe Winkel sind, und wo die dem geraden Winkel entgegenstehende Seite kleiner, die zwo andern Seiten aber größer sind als Quadranten. Z. B. A E B Fig. 4.

Fünf-

Fünftens: Daß es auch Triangel giebt, in welchen ein Winkel gerad, der andere spitzig, und der dritte stumpf sind, und wo die dem spitzigen Winkel entgegenstehende Seite kleiner, die zwo andern Seiten aber größer sind als Quadranten. Z. B. Fig. 4. A E F oder A Q F.

§. 41. Alle dergleichen Triangel, in welchen wenigst ein gerader Winkel, heißt ein geradwinklichter Triangel.

§. 42. Nebst den bisher gemeldeten Arten der Schnitte durch eine Halbkugel §. 37. 38. 39. wodurch lauter rechtwinklichte Triangel, kann es noch andere Schnitte geben, deren keiner zu den übrigen perpendicular ist, und daher entstehen die schiefwinklichten Triangel.

§. 43. Ein schiefwinklichter Triangel ist, der keinen geraden Winkel hat: oder, dessen jede Bögen (oder Seiten) schief aneinander stossen.

§. 44. Zween schiefe Durchschnitte der Halbkugel, welche auch beyde schief auf den Grundzirkel derselben aufstossen, bringen abermal verschiedene Gattungen sphärischer Triangel herfür: Denn

Erstens: Wenn Fig. 5. die Schnitte A D B und E D F so unter sich, und gegen den Zirkel der Halbkugel schief liegen, daß die Diameter A B und E F der Sectionen aufm Zirkel perpendicular anstossen, und demnach vier Quadranten A E, E B, B F, F A abschneiden.

Zwey=

Zweytens: Wenn Fig. 6. die Schnitte A D B und E D F so auf eine Art gegeneinander geneigt sind, daß sie auf den Grundzirkel einen Bogen A E abschneiden, der kleiner ist als ein Quadrant, und auch der Abstand A D und E D vom Durchschnitt I Punkt D kleiner ist.

Drittens: Wenn Fig. 7. die Schnitte A D B und E D F so gegeneinander geneigt sind, daß sie auf dem Grundzirkel einen Bogen A E abschneiden, der größer ist als ein Quadrant; die beyden Abstände A D und E D vom Durchschnitte D aber kleiner sind als Quadranten.

Viertens: Wenn Fig. 8. die Schnitte A D B und E D F so gegeneinander geneigt sind, daß sie auf dem Grundzirkel abermal einen Bogen A E abschneiden, der größer ist als ein Quadrant, dabey aber die Abstände A D und E D von ungleicher Gattung, das ist, wenn A D kleiner und E D größer sind als Quadranten.

Schol. 1. Bey bloßer Betrachtung der Figuren 5. 6. 7. 8. fällt in die Augen, daß durch alle diese schiefe Sectionen allemal auf der Halbkugel vier Triangel entspringen.

Schol. 2. Die fünfte Figur läßt sich durch die Maschin Fig. * * vorstellen, wenn die zween Halbzirkel Q E O und X E Z nach ihren Ritzen F C in einander geschoben, und beyde zugleich so weit

auf

auf den Grundzirkel niedergedruckt werden, daß ihre Diameter untereinander einen geraden Winkel machen.

Die 6. Figur wird durch die Maschin vorgestellt werden: wenn man die zween Halbzirkel wie vorher nach F C in einander füget, und beyde also über den Grundzirkel niederdrückt, daß sie einen Bogen A E abschneiden, der kleiner ist, als ein Quadrant.

Die 7. Figur giebt sich an der Maschin, wenn die zween Halbzirkel, wie vorher, nach F C in einander geschoben, und beyde über den Grundzirkel so weit niedergedruckt werden, daß der Bogen A E größer sey, als ein Quadrant.

Die 8. Figur vorzustellen, müssen die zween Halbzirkel abermal nach F C in einander gefügt, nachmals aber ganz enge zusammengezogen, und endlich beyde auf den Grundzirkel nach einer Seite niedergedruckt werden. Denn es ist zu merken, daß der Bogen A D der 8ten. mit dem Bogen E D der 7ten. Figur eines ist.

Schol. 3. In Fig. 5. können die Bögen A D und D E gleich oder ungleich seyn. Im ersten Fall ist der Triangel A D E gleichschenklicht: im zweyten aber ungleichschenklicht. Die Winkel D A E und D E A sind allzeit spitzig, A D E aber allzeit stumpf.

In Fig. 6. können im Triangel A D sowohl alle drey Seiten, als zwey gleich, auch alle drey ungleich seyn. Die Winkel D A E und D E A sind allzeit spitzig, aber A D E kann im zweyten und dritten Fall spitzig und stumpf seyn.

In Fig. 7. können die Bögen A D und D E wiederum gleich oder ungleich seyn: Folglich der Triangel ein Isosceles oder Scalenum seyn: die Winkel aber D A E und D E A sind allzeit spitzig, und A D E allzeit stumpf.

In Fig. 8. sind die Bögen A D und D E allzeit von verschiedener Art: nämlich A D ist kleiner und D E größer als ein Quadrant: demnach sind D E und A E von gleicher Art, können auch einander gleich oder ungleich seyn. Nun aber die Winkel D A E und D E A sind allzeit spitzig, A D E allzeit stumpf.

Schol. 4. Was es in Fig. 5. 6. 7. 8. mit den Triangeln ADF, F D B, B D E für eine Beschaffenheit habe, läßt sich aus bisher gemeldetem leicht abnehmen: Weil ihre Winkel und Bögen entweders mit jenem des Triangels A D E gleich, oder ihre Supplemente zu 180° sind: denn F B = A E: AF = BE: FDB = ADE: DAF = DBF: DEB = DFB: DAE = DBE: EDB = ADF. Die Supplemente geben sich durch die anliegende Theile. Dieß sey genug gemeldet zu haben, damit wir es nicht zu lang machen.

Schol.

Schol. 5. Dieses verdient aber eine besondere Beobachtung, daß bey allen Kugelschnitten Fig. 1. 3. 4. 5. 6. 7. 8. auf der andern Halbkugel eben so viele und gleiche Triangel entstunden, wenn man die auf der Halbkugel gemachte Schnitte durch die ganze Kugel fortsetzte: weil die grösten Zirkel am Ende ihrer Diameter sich auf gleiche Weise durchschneiden. Dieses war die Ursache, warum wir die Trigonometrie Leichtigkeit halber nur an der Halbkugel betrachten.

Schol. 6. Aus allem, was in diesem Hauptstück ist gesagt worden, ergiebt sich, daß die so mannigfaltige Gattung sphärischer Triangel aus siebenerley Arten der Sectionen an einer Halbkugel entstehe: Erstens: Wenn alle drey Flächen der Sectoren wechselweis perpendicular sind §. 37. wie in 1. Fig. *. Zweytens: Wenn zwo Flächen zur dritten perpendicular, sie aber untereinander schräg sind §. 38. Fig. 3. *. Drittens: Wenn eine zu einer perpendicular, die dritte aber über die vorige beyde schräg geht §. 39. Fig.4. *. Viertens: Wenn beyde Schnittflächen auf einen Quadranten der dritten sich neigen. §.39. Fig.5. *. Fünftens: Wenn zwey Schnittflächen so auf die dritte sich neigen, daß sie auf ihr einen Bogen abschneiden, welcher kleiner als ein Quadrant ist §. 44. N. 2. Fig. 6. *. Sechstens: Wenn zwo Schnittflächen von gleicher Art die dritte dergestallt durchschneiden, daß deren

Sector

Sector grösser als ein Quadrant ist §. 44. N. 3. Fig. 7. *. Siebentens endlich wenn zwo Schnittflächen von ungleicher Art sich so an die dritte neigen, das deren Sector grösser als ein Quadrant ist, §. 44. N. 3. Fig. 8.

Viertes Hauptstück.

Von den Eigenschaften sphärischer Triangel, die allen gemein sind.

§. 45.

Zween sphärische Triangel sind gleich. Erstens: Wenn eine Seite des einten sammt den daranstossenden Winkeln gleich ist einer Seite des andern sammt den gleichfalls anstossenden Winkeln *.

Zweytens: Wenn zwo Seiten mit dem zwischenliegenden Winkel des einen gleich sind zwoen Seiten mit ihrem Zwischenwinkel des andern Triangels *.

Drittens: Wenn die drei Seiten des einen gleich sind den drey Seiten des andern Triangels.

Der Beweis dieser Sätze gründet sich, wie bey geradlinichten Triangeln darauf, weil die zween Triangel unter vorgesetzten Bedingnissen übereinander gelegt, den nämlichen Raum der Kugel einnehmen.

§. 46. Zwo Seiten eines sphärischen Triangels zusammen genommen sind allzeit grösser, als seine dritte Seite allein genommen. Die Ursache dieses Satzes beruhet darauf, daß, gleichwie an einer geraden Linie der kürzeste Raum zwischen den beyden Endpunkten die Linie selber ist; also auch der kürzeste krumme Zwischenraum eines Bogens von einem Ende zum andern desselben der Bogen selbst ist.

§. 47. I. Theorem. Die drey Seiten (oder Bögen) eines sphärischen Triangels können niemals dem Umkreis des ganzen Zirkels (360°) gleich seyn.

Beweis. Die drey Seiten eines sphärischen Triangels sind Bögen dreyer Sectoren, die im Centrum der Kugel zusammen laufen, und den Vertex einer Pyramiden, oder einen soliden Winkel machen. §. 39. Nun aber kann aus drey Sectoren, die miteinander 360°, oder vier gerade Winkel ausmachen, nicht entstehen: weil sie aneinander stossend einen flachen Zirkel geben: folglich können die drey Seiten eines sphärischen Triangels niemal 360° betragen. W. Z. E. W.

§. 48. II. Theorem. In einem sphärischen Triangel kann keine Seite ein halber Zirkel (oder 180°) seyn.

Beweis. Zwo Seiten sind allzeit grösser, als die dritte. §. 46. Wenn denn eine Seite 180° hätte,

hätte, so hätten die zwo übrigen mehr als 180°: folglich hätten alle drey Seiten mehr als 360°, welches unmöglich ist aus §. 47.

§. 49. III. Theorem. Wenn die drey Spitze (Fig. 9.) der Winkel A, B, C des Triangels ABC die Pole sind der Bögen EF, ED, FD, aus welchen der umschriebene Triangel DEF bestehet; so ist ein jeder Bogen dieses zweyten Triangels DEF gleich dem Suplement des Polwinkels im ersten Triangel: das ist A + EF = 180°. Item B + DF = 180°. Und C + DE = 180°.

Und wechselweis sind die Bögen des Triangels ABC die Suplemente der entgegenstehenden Winkel des Triangels DEF: das ist BC + D = 180°. Item AC + E = 180°. Und AB + F = 180°.

Beweis. 1. Der Punkt F steht von A und B 90° ab; denn A ist der Pol des Bogens EF, und B ist der Pol des Bogens DF. Deßwegen ist der Punkt F, der zu allen beyden Bögen gehört, von A und B um 90° entfernt.

2. Ebenso steht E von A und C um 90° ab; denn A ist der Pol des Bogen EF, und C ist der Pol des Bogen DE, und demnach ist der Punkt E, der zu beyden Bögen gehört, von A und C um 90° entfernt.

3. Abermal steht D von B und C um 90° ab; denn B ist der Pol des Bogen DF, und C ist

der

der Pol des Bogen DE, und ist demnach der Punkt D, der zu beyden Bogen gehört, von B und C 90° entfernt.

4. Nun weil A und B von F 90° entfernt sind n. 1., so ist F der Pol aller beyder Punkte, und kann der Bogen GBAM gezogen werden, dessen alle Punkte von F 90° entfernet sind; weßwegen dann GF und FM jedes 90° hat.

5. Ebenso, weil A und C von E 90° entfernet sind n. 2., so ist E ihr und des ganzen Bogen IACF Pol. Weßwegen gleichfalls IE und HE jedes 90° hat.

6. Abermal, weil D von B und C 90° entfernt sind n. 3., so ist D der Pol aller beyden, und des Bogen LBCN; und demnach ist DL und DN jedes von 90°.

7. Gleichfalls, weil der Bogen GH aus A als Pole beschrieben ist, so ist GA und HA jedes = 90°.

8. Und so, weil der Bogen LI.. aus C als Pole beschrieben ist, so ist IC und LC jedes = 90°.

9. So endlich, weil der Bogen MN aus B als Pole beschrieben ist, so ist MB und NB jedes = 90°.

Diesen Beweis vorausgesetzet,

Sage ich erstens: A + EF = 180°.

Be-

Beweis. Es ist $GH = GE + EF + FH$.
Hernach ist $GF = 90^{0}$. n. 4. und $EH = 90^{0}$ n. 5.
Folglich ist $GF + EH = 90 + 90 = 180$.
Wiederum ist $GF = GE + EF = 90$ und $EH = EF + FH = 90$.
Folglich ist $GF + EH = GE + EF + EF + FH = 180^{0}$.
Setzt man in dieser letzten Aequation anstatt $GE + EF + FH$ sein Gleiches aus der ersten Aequation, nämlich GH
So entsteht diese Aequation $GH + EF = 180$.
Weil aber GH gleich ist dem Winkel A als sein Maaß, so ist $A + EF = 180$. W. Z. E. W.

Ich sage zweytens: $B + DF = 180^{0}$.

Beweis. Es ist $DF = DM + MN + NF$.
Hernach $DN = 90$. n. 5. Und $MF = 90$. n. 4.
Folglich $DN + MF = 90 + 90 = 180$.
Wiederum $DN = DM + MN = 90$ und $MF = MN + NF = 90$.
Folglich $DN + MF = DM + MN + MN + NF = 180^{0}$.
Und anstatt $DM + MN + NF$ aus der ersten Aequation sein Gleiches DF genommen
Entsteht $DF + MN = 180$.
Weil aber MN als das Maaß des Winkels B diesem gleich ist: so ist $B + DF = 180$. W. Z. E. W.

Ich

Ich sage drittens: $C + DE = 180^\circ$.

Beweis. Es ist $DE = DI + IL + LE$

Hernach $DL = 90$ n. und $IE = 90^\circ$.

Folglich ist $DL + IE = 90 + 90 = 180^\circ$.

Wiederum $DL = DI + IL = 90$. und $IE = IL + LG = 90$.

Folglich $DL + IE = DI + IL + IL + LG = 180$.

Nun anstatt $DI + IL + LG$ aus der ersten Aequation sein Gleiches DE genommen

Entsteht $DE + IL = 180$. Weil aber IL als das Maaß des Winkels C diesem gleich ist,

So ist $DE + C = 180$. W. Z. E. W.

Ich sage viertens: $AB + F = 180^\circ$.

Beweis. Es ist $GM = GB + BA + AM$.

Hernach $GA = 90$. n. und $BM = 90$. n.

Folglich $GA + BM = 90 + 90 = 180$.

Wiederum $GA = GB + BA = 90$ und $BM = BA + AM = 90$.

Folglich $GA + BM = GB + BA + BA + AM = 180$.

Anstatt $GB + BA + AM$ aus der ersten Aequation sein Gleiches GM genommen entsteht $GM + AB = 180$. und anstatt GM seinen Winkel F genommen, so entsteht $F + AB = 180$.

Ich sage fünftens: $AC + E = 180$.

Beweis. Es ist $IH = IA + AC + CH$.

Hernach $IC = 90.$ n. und $AH = 90.$ n.

Folglich $IC + AH = 90 + 90 = 180.$

Wiederum $IC = IA + AC = 90.$ und $AH = AC + CH = 90.$

Folglich $IC + AH = IA + AC + AC + CH = 180.$

Anstatt $IA + AC + CH$ aus der ersten Aequation sein Gleiches IH genommen, entsteht $IH + AC = 180.$, und anstatt IH seinen gleichen Winkel E genommen, entsteht $E + AC = 180.$ W. Z. E. W.

Ich sage sechstens: $BC + D = 180.$

Beweis. Es ist $LN = LB + BC + CN.$

Hernach $LC = 90$ n. und $BN = 90.$

Folglich $LC + BN = 90 + 90 = 180.$

Wiederum $LC = LB + BC = 90.$ und $BN = BC + CN = 90.$

Folglich $LC + BN = LB + BC + BC + CN = 180.$

Anstatt $LB + BC + CN$ aus der ersten Aequation sein Gleiches LN gesetzt, entsteht $LN + BC = 180.$ und anstatt LN seinen gleichen Winkel D gesetzt, so entsteht $BC + D = 180.$ W. Z. E. W.

§. 50. *Corollar.* Wenn zween Triangel alle drey Winkel, oder alle drey Seitenbogen gleich gegeneinander haben, so sind sie durchaus gleich: denn beschreibt man um sie zween andere Triangel

als

als aus ihren Suplementen, nach Vorschrift des vorgehenden Theorems: so werden entweder die Winkel, oder die Seiten gegeneinander gleich seyn.

*) Dieser Zusatz läßt sich an geradlinichten Triangeln nicht anwenden.

§. 51. IV. Theorem. In sphärischen Triangeln ist die Summe aller der dreyen Winkeln allzeit grösser als zween gerade, oder 180°: und allzeit kleiner als sechs gerade Winkel, das ist als 540°.

Beweis. Die drey Winkel des eingeschriebenen machen mit den drey Seiten des umschriebenen Triangels sechs gerade Winkel aus, weil sie wechselweise die Supplemente zu 180° sind aus §. 49. Es können aber jene drey Seiten vier gerade Winkel nicht begreifen §. 47. Folglich müssen für jene drey Winkel mehr als zwey gerade übrig bleiben.

Hernach kann ein Winkel nicht zweyen geraden gleich seyn, weil die zwo anliegenden Seiten mit ihren Sectoren flach liegen müßten, und demnach keinen Winkel machten. Da dann ein Winkel nicht zwey gerade, so können auch drey Winkel nicht sechs gerade Winkel ausmachen. W. Z. E. W.

§. 52. Die Gränzen demnach des Werthes der drey Winkeln sind an sphärischen Triangeln zwischen 180° und 540°. Es können demnach die drey Winkel, ein jeder erstens gerad, zweytens spitzig, drittens stumpf, und viertens auch untereinander verschieden seyn.

*) Daher folget, daß in sphärischen Triangeln, wenn schon zween Winkel bekannt sind, der Werth des dritten nicht könne daraus bestimmet werden, wie es doch in geradlinichten Triangeln geschieht, wo die drey Winkel allemal 180° zusammen ausmachen.

§. 53. V. Theorem. Wenn an einem Triangel zwo Seiten gleich sind, so sind auch die Winkel gleich, die den zwoen Seiten gegenüber stehen; und hinwieder, wenn zween Winkel gleich sind, so sind auch die Seiten gleich, die den zweenen Winkeln entgegen stehen.

Beweis. Fig. 10. Man schneide von den gleichen Seiten AB, AC gleiche Theile AE, AF ab, und ziehe die Bögen EC, FB nach den entgegenstehenden Winkeln C, B, so wird der Triangel AEC dem andern AFB gleich seyn: denn AE des ersten ist gleich dem AF des zweyten: und AC des ersten ist gleich dem AB des zweyten: der Winkel bey A gehört zu allen zweyen. Folglich ist auch EC des ersten gleich dem FB des zweyten; und sind demnach alle drey Seiten des ersten gleich den drey Seiten des zweyten. Woraus folget, daß sie durchaus gleich sind. §. 45. n. 3.

Gleichfalls sind die Triangel EBC; FCB gleich: denn EB des ersten ist gleich dem FC des zweyten, weil sie von gleichen Ganzen gleich sind abgeschnitten worden. Hernach ist EC des ersten

gleich

gleich dem FB des zweyten. Endlich gehöret BC zu allen beyden, und so sind sie durchaus gleich. §. 45. n. 3. Folglich ist der Winkel B des ersten gleich dem Winkel C des zweyten. Es ist aber B der Winkel der Seite AC gegenüber; und der Winkel C steht gegenüber der Seite AB. Folglich sind zween gleiche Winkel zwoen gleichen Seiten entgegen gestellt. W. Z. E. W.

*) Der umgekehrte Satz im Theorem wird bewiesen, wenn man auch die Sätze dieses Beweises in umgekehrter Ordnung betrachtet.

**) Aus diesem Theorem erhellet, daß ein gleichseitiger Triangel auch gleichschenklicht ist; und so auch umgekehrt.

§. 54. VI. Theorem. Fig. 11. Wenn zwischen zwoen gleichen Seiten AB, AC ein Bogen AD auf die Helfte D der dritten Seite BC gezogen wird, so wird erstens der Triangel ABC in zween andere gleiche ABD, ADC getheilt, und zweytens der Bogen AD auf den dritten perpendicular auffallen.

Beweis. Den Bogen AB im ersten hat man schon gleich angenommen dem Bogen AC im zweyten Triangel: Hernach hat man BD im ersten gleich gemacht dem DC im zweyten; weil man BC nach der Hälfte getheilet hat. Endlich gehöret AD zu allen beyden. Demnach sind beyde Triangel ABD und ACD durchaus gleich. §. 45. n. 3.

Ferner: weil die Triangel ABD und ACD gleich sind: so ist auch der Winkel bey D in beyden gleich. Da aber derselbe wechselweise in einem das Suplement ist des andern, indem sie aneinander anliegen, so ist er ein gerader Winkel in beyden Triangeln, und folglich ist der Bogen AD perpendicular zum Bogen BC.

§. 55. Folge I. Im gleichschenklichtem Triangel ABC Fig. 11. theilet der durch A auf der Basis BC gezogene Perpendicularbogen nach der Hälfte ab; denn die Triangel ADB und ADC sind durchaus gleich. §. 54. Und demnach sind die Winkel B und C an der Grundlinie gleich: auch ist BAD = CAD.

§. 56. Folge II. Wenn ein Perpendicularbogen AD Fig. 11. zur Basis BC den Winkel A halb durchschneidet, so ist der Triangel ABC gleichschenklicht, der dadurch auch nach der Hälfte abgetheilt wird.

§. 57. Folge III. Ist Fig. 11. A der Pol der Basis BC: so sind alle drey Bögen AB, AD, AC Quadranten, die perpendicular auf der Grundlinie BDC stehen: deßwegen sind die Winkel B, C und D beyderseits gerade Winkel.

*) In geradlinichten Triangeln geht diese Folge nicht an.

§. 58. VII. Theorem. Im Triangel steht allemal der grössere Winkel der grössern Seite; und

und umgekehrt die grössere Seite dem grössern Winkel gegenüber.

Es sey Fig. 12. im Triangel ABC der Winkel ABC grösser als der Winkel C; so sage ich, die Seite AC sey grösser, als die Seite AB.

Beweis. Man ziehe einen Bogen DB, so, daß die Winkel DBC und DCB gleich werden: so ist der Triangel DBC gleichschenklicht, und BD = CD. §. 53. Ferner ist AC = AD + DC. und weil DC = DB; so ist auch AD + DC = AD + DB. Nun ist im Triangel ADB die Seite BD < als BA + AD §. 46. und AB < AD + DB; weil demnach AD + DB gleich ist der Seite AC: so ist auch AB < AC. W. Z. E. W.

Beweis des umgekehrten Satzes. Wären die Winkel ABC und ACB gleich; so wären auch die Seiten AB, AC gleich §. 46. welches wider den gegebenen Fall ist. Wäre aber der Winkel C an der Seite AC grösser, als der Winkel ABC an der Seite AB, so wäre auch AB > AC wider den vorigen Beweis, und gegebenen Fall. Folglich ist die grössere Seite auch dem grössern Winkel gegenüber. W. Z. E. W.

§. 59. VIII. Theorem. Erstens: Wenn Fig. 14. die Summe zwoer Seiten AB + BC einen Halbzirkel (180°) ausmachet, so ist im Triangel ABC der innere, oder der Seite BC entgegenstehende

Winkel A gleich dem äussern Winkel BCD an derselbigen Seite BC.

Zweytens; Ist aber die Summe zwoer Seiten als AB + BE grösser als ein Halbzirkel, so ist im Triangel ABE der innere Winkel A grösser, als der äußere BED an der entgegenstehenden Seite BE.

Drittens: Ist endlich die Summe zwoer Seiten, als AB + BG kleiner als ein Halbzirkel: so ist im Triangel ABG der innere Winkel A kleiner, als der äußere BGD an der entgegenstehenden Seite BG.

Beweis. Man verlängere den Bogen AB bis in D, damit ABD ein Halbzirkel sey. Nun

Im ersten Fall ist AB + BC = 180. Es ist aber auch AB + BD = 180. Folglich ist BC = BD, und der Triangel BCD ist gleichschenklicht. Deßwegen sind auch die Winkel BCD und BDC gleich. §. 55. Weil demnach auch D = A: so ist auch BCD = A. das ist, der äußere Winkel ist in diesem Fall gleich dem innern.

Im zweyten Fall ist AB + BE > 180. das ist AB + BE > AB + BD. Folglich BE > BD: Folglich ist auch D > BED. §. 58. Weil dann D = A: so ist A der innere Winkel > BED dem äußern der Seite BE.

Im dritten Fall ist AB + BG < 180: das ist AB + BG < AB + BD: Folglich ist BG < BD:

BD: Folglich ist auch D<BGD. §. 58. Weil dann D=A: so ist auch A der innere Winkel <BGD dem äußern der Seite BG.

§. 60. Zusatz. Es kann zween sphärische Triangel geben, worinnen wechselweis zween Winkel und eine Seite gleich sind, ohne daß die ganzen Triangel gleich seyen: denn es sey Fig. 15. ein Triangel ABC, und AB+BC=180: so wird der Winkel A=BCD seyn. Der andere Triangel sey nun BCE, und werde mit dem Triangel ABC verglichen. Es ist BCE im vorigen =BAC im letztern. Nun sey noch ein dritter Triangel ABE, und werde mit dem Triangel CBE verglichen. A im vorigen ist =C im letzten. E gehört zu allen beyden, und BE auch: Folglich sind in den Triangeln ABE und BCE zween Winkel und eine Seite gleich; sie aber sind einander dennoch ungleich.

*) Dieses kann sich in geradlinichten Triangeln nicht ereignen.

§. 61. IX. Theorem. In jedem sphärischen Triangel ABC Fig. 14. wenn der innere Winkel A gleich, oder grösser, oder kleiner ist als der äußere Winkel an der gegenüberstehenden Seite BC; so ist die Summe der Seiten AB+BC gleich, oder grösser, oder kleiner, als ein Halbzirkel oder 180°.

Beweis. Wenn A = BCD: so ist BCD = D. §. 59. und BC = BD. §. 53. Weil dann BD + BA = 180 oder einem Halbzirkel: so ist es auch BC + BA.

Beweis. Wenn A > BCD: so ist auch D > BCD §. 59. und BC > BD §. 53. Weil nun AB + BD = 180: so ist AB + BC > 180.

Beweis. Wenn A < BCD: so ist D < BCD §. 59. und BC < BD §. 53. Weil nun AB + BD = 180: so ist AB + BC < 180. W. Z. E. W.

*) Dieses Theorem enthält die Sätze des vorhergehenden umgekehrt.

§. 62. Anmerkung. Alle vorige Theoremen gehören zu den sowohl geradwinklichten, als schiefwinklichten sphärischen Triangeln.

Fünftes Hauptstück.

Von den Arten der Theile an den spärischen Triangeln.

§. 63.

Die Theile eines sphärischen Triangels sind seine drey Winkel, und seine drey Bögen.

Die drey Bögen nennt man seine Seiten.

Ins besondere heißt in einem geradwinklichten Triangel jener Bogen, der dem geraden Winkel gegenüber liegt, Hypothenuse: die übrigen zween

Bögen

Bögen aber heissen glathin die Seiten, oder auch Schenkel.

Ein Winkel kann gerad $= 90°$, oder größer (stumpf) $= > 90$ oder kleiner (spitzig) $= < 90$ seyn. Und dieses sind seine drey Arten.

Ein Bogen kann ein Quadrant $= 90°$, oder größer $= > 90°$, oder kleiner $= < 90°$, als ein Quadrant seyn. Dieses sind abermal seine drey Arten.

Basis oder Grundseite eines Winkels heißt jene Seite, die ihm im Triangel gegenüber liegt, oder entgegensteht.

Es ist zu merken, daß in sphärischen Triangeln nicht nur die Winkel, sondern auch die Seiten als Zirkelbögen durch Grade, Minuten rc. des Zirkels gemessen, und nach solchen Theilen in der Trigonometrie betrachtet werden.

§. 64. I. **Theorem.** In jedem geradwinklichten sphärischen Triangel sind die Winkel an der Hypothenuse gleicher Art mit den ihnen gegenüber liegenden Seiten. Fig. 16.

Es sey erstens der bey A rechtwinklichte Triangel EAC, und die Seite AE ein Quadrant: so sage ich, der Winkel ACE, der an der Hypothenuse CE anliegt, und dem Quadranten AE gegenübersteht, sey $= 90°$.

Beweis. A ist ein gerader Winkel: wie der Fall lautet: Folglich sind die Bögen AE, und AC

perpen-

perpendicular: AE ist auch ein Quadrant; wie abermal der Fall lautet. Folglich ist E der Pol des Bogen AC. §.6. Demnach streicht CE durch den Pol des Bogen AC, und steht auf diesem perpendicular §. So sind dann CA und CE auch perpendicular; und ist folglich ihr eingeschlossener Winkel ACE gerad oder 90°.

Es sey zweytens der bey A geradwinklichte Triangel BAC, und die Seite AB < 90: so sage ich, der gegenstehende Winkel ACB an der Hypothenuse BC sey auch < 90.

Beweis. Der Bogen BC fällt zwischen dem geraden Winkel ACE: demnach ist der Winkel BCA nur ein Theil des geraden: das ist, er ist < 90°.

Es sey drittens der bey A geradwinklichte Triangel FAC, und die Seite AF > 90; so sage ich, der gegenüberliegende Winkel ACF an der Hypothenuse FC sey > 90°.

Beweis. Der Bogen FC fällt über den geraden Winkel ACE hinaus: Folglich ist der Winkel ACF > 90°. W. Z. B. W.

§. 65. Die umgewandten Sätze sind auch wahr, und werden umgekehrt bewiesen.

§. 66. Zusätze. In jedem geradwinklichten Triangel, wenn erstens eine Seite ein Quadrant ist, so ist auch die Hypothenuse ein Quadrant. Zweytens, wen eine Seite kleiner ist, als ein Quadrant,

so ist dieselbe auch kleiner, als die Hypothenuse. Drittens, und wenn eine Seite grösser ist, als ein Quadrant, so ist sie auch grösser, als die Hypothenuse: denn im ersten Fall ist der entgegengesetzte Winkel gerad; im zweyten ist er spitzig, und im dritten ist er stumpf §. 64. weil nämlich der der Hypothenuse entgegenstehende Winkel allzeit ein gerader ist, und die kleinere Seite allzeit dem kleinern Winkel, auch die grössere Seite dem grössern Winkel entgegensteht. §. 58.

§. 67. II. **Theorem.** Wenn (in jedem schiefwinklichten Triangel) der aus einem Winkel A auf seiner Basis D C gezogene Perpendikelbogen A D (Fig. 18.) in den Triangel A B C hineinfällt, so sind die zween Winkel an der Basis B und C von nämlicher Art, das ist, alle zween sind spitzig, oder alle zween sind stumpf.

Fällt aber (Fig. 19. und 20.) der Perpendikelbogen A D ausser den Triangel A B C auf die verlängerte Basis; so sind die Winkel B und C an der Basis unähnlicher Art, nämlich einer ist spitzig, oder < 90: und einer ist stumpf, oder > 90.

Beweis. Fig. 18. Der Perpendikelbogen A D erzeugt zween geradwinklichte Triangel ADB, ADC. Nun ist B im ersten von der Art A D §. 64. und C im zweyten ist auch von der Art A D §. 64. Folglich sind B und C der nämlichen Art; das war der erste Satz.

Her-

Hernach Fig. 19. entstehen durch den Perpendikelbogen AD zween Triangel ADB; ADC geradwinklicht bey D. Im ersten ist B von der Art AD §. 64. und im zweyten ist ACD auch von der Art AD §. 64. Folglich sind B und ACD der Winkel der nämlichen Art. Nun aber sind die Winkel ACD und ACB verschiedener Art, weil einer das Suplement des andern ist. Folglich sind B und ACB die Winkel im Triangel ABC, wo der Perpendikel hinausfällt, von verschiedener Art, und das war der zweyte Satz.

*) Eben so geschieht der Beweis in der Fig. 20. Wenn man die Triangel ADC und ADB betrachtet, denn beyde Winkel C und ABD sind gleicher Art mit AD: Folglich ist ABC das Suplement von ABD mit C ungleicher Art.

§. 68. So ists umgekehrt auch: wenn nämlich beyde Winkel am Basis einerley Art haben, so fällt der Perpendikel innerhalb des Triangels: sind aber die Winkel am Basis unähnlicher Art, so fällt der Perpendikel ausserhalb.

*) Das Theorem setzet voraus, daß A nicht der Pol sey des Grundbogen BC: denn wäre A dessen Pol; so wären alle Bögen aus A auf BC lauter Quadranten, und Perpendikelbögen: und alle Winkel bey B, C, D, gerade Winkel.

§. 69. III. Theorem. In jedem geradwinklichten Triangel, wenn eine Seite kleiner ist, als

ein

ein Quadrant; so ist die Hypothenuse jener Art, von welcher Art die andere Seite ist. Fig. 16.

Erstens: Es sey die Seite AC $<$ 90, und die andere Seite AE sey $=$ 90, oder ein Quadrant, so sage ich, auch die Hypothenuse EC sey $=$ 90.

Beweis. Im Triangel AEC, der bey A geradwinklicht ist, ist der Bogen AC perpendicular mit dem Bogen AE; weil der Winkel A gerad ist. Der Bogen AE ist 90: Folglich ist E der Pol des Bogen AC: und demnach ist CE auch 90, oder ein Quadrant. W. Z. B. W.

Zweytens: Es sey im geradwinklichten Triangel BAC eine Seite AC $<$ 90: und die andere Seite AB auch $<$ 90, das ist, kleiner als ein Quadrant; so sage ich, auch die Hypothenuse BC sey $<$ 90.

Beweis. Wenn die Seite AB verlängert wird, damit AE ein Quadrant sey, so ist E der Pol des Bogen AC aus N. I. und der Winkel AEC ist spitzig, weil die Seite AC, dessen Maaß, $<$ 90. Der Winkel ABC ist auch spitzig, nach §. 66. weil die Gegenseite AC $<$ 90. folglich ist der Winkel CBE als Suplement stumpf. Nun so ist im Triangel EBC die Seite BC $<$ EC, weil auch CEB $<$ CBE §. 58. das ist, die Hypothenuse BC des Triangels ABC ist kleiner, als der Quadrant EC. W. Z. B. W.

Drit-

Drittens: Endlich sey im Triangel FAC eine Seite $AC < 90$, die andere $AF \not< 90$; so sage ich, auch die Hypothenuse FC sey > 90.

Beweis. Weil der Winkel $AEC < 90$ aus N. II. so ist sein Suplement $CEF > 90$. Der Winkel AFC aber ist spitzig; weil im Triangel AFC die Seite $AC < 90$. Demnach ist im Triangel ECF der Winkel E spitzig, und F stumpf; folglich ist $FC > EC$ §. 66. Weil dann EC ein Quadrant ist aus N. I. so ist FC die Hypothenuse des Triangels AFÇ größer als ein Quadrant. W. Z. B. W.

Zusätze zu §. 69.

§. 70. Erstens: Sind im Triangel alle drey Seiten Quadranten, so sind auch alle drey Winkel gerad: denn ihrer jeden Vertex ist vom andern um einen Quadranten entfernt, und sind die Pole der entgegenstehenden Quadranten: eben darum sind diese Quadranten das Maaß der gegenseitigen Winkel.

*) Diese Gattung der Triangel hat daher wechselweise drey Hypothenusen §. 62.

§. 71. Zweytens: Sind zwo Seiten Quadranten, so sind auch zween Winkel, die gegenüber steht, gerad: die dritte Seite aber mit ihrem Gegenwinkel ist von der nämlichen Art: nämlich beydes, sowohl Winkel als Seite sind entweders kleiner als 90, oder größer als 90; denn die zween Quadranten

ten

ten stehen auf der dritten Seite perpendicular, und folglich nach geraden Winkeln: der dritte Winkel aber, denn die zween Quadranten einschliessen, ist der Pol der dritten Seite, durch deren Bögen er gemessen wird, und so von einerley Art seyn muß.

*) Diese Gattung der Triangel hat in verschiedenem Betracht zwo Hypothenusen §. 62.

§. 72. Drittens: Ist die Hypothenuse kleiner, als ein Quadrant: so sind außer dem geraden Winkel alle übrige Theile entweders < 90, oder alle > 90. So ist Fig. 4. im Triangel AQB, wo die Hypothenuse $< 90°$ ist, sowohl die Winkel A und B, als die Seiten BQ und AQ, jedes < 90. Und im Triangel AEB, wo die dem geraden Winkel E entgegenstehende Hypothenuse AB abermal < 90 ist, die Winkel A und B, wie auch die Seiten EA und EB, jedes > 90. Der erste Satz folgt aus §. 69. N. II. Der zweyte Satz ergiebt sich aber daher, weil in den Triangeln AQB und AEB die Seiten sowohl als die Winkel wechselweise ihre Suplementen sind.

§. 73. Viertens: Sind beyde Seiten, jede < 90, so ist auch die Hypothenuse < 90. Dieses ist selbst der zweyte Fall des Theorems §. 69.

§. 74. Fünftens: Ist eine Seite < 90, die andere > 90, so ist auch die Hypothenuse > 90. Dieses ist auch selbst der dritte Fall des Theorems §. 69.

§. 75. Sechstens: Die Hypothenuse kann allein kein Quadrant seyn. Denn ist eine Seite auch ein Quadrant, so ist die Hypothenuse es nicht allein. Sind die zwo Seiten größer als Quadranten; so ist die Hypothenuse kleiner §. 72. Sind beyde Seiten kleiner als Quadranten, so ist die Hypothenuse abermal kleiner §. 73. Ist aber eine Seite kleiner, und die andere größer, als ein Quadrant, so ist die Hypothenuse größer. §. 74.

§. 76. Siebentens: Ist die Hypthenuse größer, als ein Quadrant; so sind die zwo Seiten von verschiedener Art, eine < 90 die andere > 90. §. 69. N. III. und weil die entgegenstehende Winkel die Art der Gegenseiten an sich haben, §. 64. so sind auch die Winkel einer < 90 der andere > 90. Dieses läßt sich Fig. 4. an dem bey E rechtwinklichten Triangel AEF wahrnehmen, wo die Hypothenuse AF > 90 ist: denn die Seite EA ist > 90, als das Suplement des Bogen AQ < 90. Der Winkel FAE ist auch < 90: denn sein gleicher Verticalwinkel QAB ist spitzig. Die Seite EA ist > 90; denn sie ist das Suplement von AQ: und ihr entgegengesetzter Winkel AEF ist auch > 90; denn er ist gleich ABE dem Suplement des Winkels ABQ.

§. 77. Achtens: Sind die Winkel an der Hypothenuse von nämlicher Art, nämlich beyde < 90, oder beyde > 90: so ist auch die Hypothenuse < 90. und zwar im ersten Fall sind auch die zwo Seiten

< 90: im zweyten aber sind auch die zwo Seiten > 90. §. 64.

§. 78. Neuntens: Sind die Winkel an der Hypothenuse von verschiedener Art, nämlich einer < 90, der andere > 90: so ist die Hypothenuse > 90. weil die Gegenseite des ersten Winkels < 90, und die Gegenseite des andern Winkels > 90 ist. §. 64. und §. 74.

§. 79. Zehntens: Ist eine Seite mit ihrem anstossenden Winkel von der nämlichen Art: nämlich jedes < 90, oder jedes > 90: so ist die Hypothenuse allzeit < 90. Denn im ersten Fall wird auch der andere Winkel und die andere Seite jedes < 90 §. 64. im andern Fall wird auch der andere Winkel und die andere Seite jedes > 90 seyn. §. 64. Folglich ist die Hypothenuse allzeit < 90. §. 77.

§. 80. Eilftens: Sind eine Seite und der anliegende Winkel von verschiedener Art, nämlich eines < 90, das andere > 90: so ist die Hypothenuse > 90: denn ist die Seite < 90, und der anstossende Winkel > 90: so ist die diesem Winkel entgegenstehende Seite auch > 90. §. 64. Folglich ist die Hypothenuse > 90. §. 74. Ist aber die Seite > 90, und der anstossende Winkel > 90, so ist die Gegenseite dieses Winkels auch > 90. §. 64. Demnach ist die Hypothenuse abermal > 90. §. 74.

§. 81. Zwölftens: Die am spitzigen Winkel anstossende Seite ist von jener Art, von welcher die Hypothenuse ist: nämlich ist erstens die Hypothenuse $< 90°$, so ist auch jene Seite < 90: ist zweytens die Hypothenuse $> 90°$, so ist auch jene Seite > 90: ist drittens die Hypothenuse $= 90$, so ist auch jene Seite $= 90$.

Denn im ersten Fall sind die Seite und der anstossende Winkel der nämlichen Art. §. 72. Im zweyten Fall sind sie unähnlicher Art. §. 76. Der dritte Fall folget, weil die Hypothenuse allein kein Quadrant seyn kann. §. 75.

§. 82. Dreyzehntens: Sind alle drey Winkel spitzig, als Fig. 18. im Triangel ABC, so sind auch alle drey Seiten, eine jede < 90: denn zieht man den Perpendikelbogen AB (welcher in den Triangel hineinfällt, §. 67.) so entstehen zween geradwinklichte Triangel, deren Hypothenusen AB, AC jede < 90 sind. §. 77. Eben so kann man's von der Seite BC beweisen, wenn der Perpendikelbogen aus B oder C gezogen wird.

*) Der umgewandte Satz ist nicht in allen Fällen wahr: denn es giebt einen rechtwinklichten Triangel, wo alle drey Seiten jede < 90 sind, und dennoch ein Winkel gerad ist.

§. 83. Vierzehntens: Sind alle drey Seiten jede $> 90°$, so sind die drey Winkel stumpf: denn nimmt man an, als werde Fig. 9. in dem gegebenen

Triangel DEF ein anderer ABC hinein beschrieben, so daß die drey Seiten des letztern aus den drey Winkeln des erstern als Polen beschrieben worden, so sind die drey Winkel dieses letztern Triangels ABC die Suplemente der drey Seiten des ersten Triangels DEF §. 49. folglich sind die drey Winkel des Triangels ABC spitzig: weil ihre Suplemente > 90°. und die drey Seiten AB, AC, BC sind jede < 90°. §. 64. Nun aber sind hinwieder die Seiten des Triangels ABC die Suplemente der Winkel des Triangels DEF §. 49. Weil dann jene Seiten < 90° sind, so sind diese Winkel > 90°, das ist, sie sind stumpf.

*) Der umgewandte Satz ist nicht in jedem Fall wahr: nämlich es können drey Winkel jeder stumpf seyn, ohne daß jede Seite größer wäre als ein Quadrant. Denn es sey Fig. 16. der Triangel BDC rechtwinklicht in D, und die Seiten BD und CD jede > 90°: so sind die Winkel DBC und DCB jeder stumpf. §. 64. Nun stelle man sich vor, als ob der Winkel D durch Voneinanderlassung der Halbzirkel AED und ACD größer, mithin stumpf werde: stelle man sich zugleich vor, als ob der Bogen BC sich dem Punkt A nähere, so werden die drey Winkel BDC, DBC, DCB immerfort stumpfer, die zwo Seiten BD und CD immerfort größer, aber die Seite CB immer kleiner als Quadranten werden.

Regeln,

um in Praxi die Theile jedes geradwinklichten Triangels nach ihrer Art unschwer zu bestimmen.

§. 84. Man kann bey Ausübung der sphärischen Trigonometrie keinen einzigen rechtwinklichten Triangel auflösen, ohne vorhinein zu wissen, von was Art §. 63. ihre Winkel und Seiten sind. Wie mannigfaltig aber diese Verschiedenheit seyn könne, erhellet aus bisher gesagtem von §. 69. bis §. 83. Diese Beschwerlichkeit, so viel möglich, zu tilgen, wollen wir hier alle Fälle ins Kurze zusammenziehen. Man merke vor allem, daß in der Ausübung ohnehin allzeit nebst dem geraden Winkel allemal zween Theile müssen gegeben seyn, aus welchen die Arten aller übrigen Theile (einen einzigen Fall ausgenommen,) können bestimmt werden. Nun dann:

1. Wenn die zween gegebene Theile ein Winkel, und seine Gegenseite sind: so kann man die Arten der übrigen Theile daraus nicht bestimmen.

2. Wenn gegeben ist die Hypothenuse $< 90^\circ$, und ein anderer Theil, was immer einer, auch $< 90^\circ$: so sind alle andere Theile auch $< 90^\circ$.

3. Hingegen: wenn zween (nicht entgegengesetzte) Theile, was immer für eine, $< 90^\circ$ sind, so ist auch die Hypothenuse $< 90^\circ$.

4. Wenn

4. Wenn gegeben ist die Hypothenuse $< 90^\circ$, und ein anderer Theil, was immer einer, $> 90^\circ$: so sind alle andere Theile $> 90^\circ$.

5. Hingegen, wenn zween (nicht entgegengesetzte) Theile, was immer für eine, $> 90^\circ$ sind: so ist die Hypothenuse $< 90^\circ$.

6. Wenn gegeben ist die Hypothenuse $> 90^\circ$: so ist ein Winkel mit seiner Gegenseite $< 90^\circ$, und der andere Winkel mit seiner Gegenseite $> 90^\circ$.

7. Wenn eine gegebene Seite $< 90^\circ$, und die andere gegebene Seite $> 90^\circ$ sind: so ist die Hypothenuse $> 90^\circ$.

8. Wenn ein gegebener Winkel $< 90^\circ$, und der andere gegebene Winkel $> 90^\circ$ sind: so ist die Hypothenuse $> 90^\circ$.

9. Wenn ein gegebener Winkel $< 90^\circ$, und die daranliegende Seite $> 90^\circ$ sind: so ist die Hypothenuse $> 90^\circ$.

10. Wenn ein gegebener Winkel $> 90^\circ$, und die daranliegende Seite $< 90^\circ$ sind: so ist die Hypothenuse $> 90^\circ$.

11. Wenn eine gegebene Seite $> 90^\circ$, und die andere Seite $< 90^\circ$ sind: so ist der entgegenstehende Winkel der ersten $> 90^\circ$, und der entgegenstehende Winkel der andern Seite $< 90^\circ$.

12. Wenn ein gegebener Winkel $> 90°$, und der andere Winkel $< 90°$ sind:
so ist die Gegenseite des ersten Winkels $> 90°$, und die Gegenseite des andern Winkels $< 90°$.

13. Wenn die Hypothenuse $= 90°$ ist, so ist wenigstens noch eine Seite und ihr Gegenwinkel $= 90°$.

*) Man merke, daß, wenn die Hypothenuse nicht im Problem ist, das ist, wenn sie weder gegeben, weder gesucht wird, man zu Bestimmung der Arten des vorgegebenen Winkels nur entweders der 11ten oder 12ten Regel bedarf.

**) Auch, wenn die Hypothenuse im Problem ist, kann man kurz durchkommen. Denn ist die Hypothenuse gegeben, so bestimmt die Art des andern gegebenen Theils alle die übrigen. Wird die Hypothenuse gesucht; so gebe man nur Obacht, ob die zwo gegebene (nicht entgegengesetzte) Theile nämlicher oder verschiedener Art seyen. Sind sie von nämlicher Art, so ist die Hypothenuse $< 90°$. Sind sie verschiedener Art, so ist die Hypothenuse $> 90°$.

Sechstes

Sechstes Hauptstück.

Theorie, wie sich die Sinus und Tangentes im geradwinklichten V. Triangel verhalten.

*) Weil in den zweenen ersten Theoremen dieses Hauptstückes der Grund aller folgenden, und der Auflösung aller V. Triangel enthalten ist, so will ich mich befleissen, da so deutlich zu seyn, als mir möglich ist. Damit denn die Theoremen und ihre Beweise selbst mit den Augen, so zu sagen, gegriffen werden, so mache man sich die 22ste und 23ste Figur aus Pappendeckel, oder auch nur aus recht starken Papier, wie itzt soll beschrieben werden. Nun dann

Erstens: Man schneide einen Halbzirkel, und lege ihn Fig. 22. nach der Mitte CI nach zweenen Quadranten CEF, und CKF zusammen. Zweytens: Man schneide einen Sector EFK des nämlichen Radius FE=FC nach einem beliebigen Bogen KE, und ziehe darauf den Sinus EG dieses Bogen, und leime diesen Sector an die Radios FE und FK der Quadranten FEC, FKC. NB. Der Sinus EG des Bogen EK wird so zugleich der Sinus des Winkels ECK; weil die Bögen CE und CK Quadranten, und demnach der Bogen EK das Maaß des Winkels ECK ist. Drittens: Man schneide noch einen Sector des nämlichen Radius

AF=CF=BF aber nach einem Bogen AB, welcher um etwas merkliches kleiner ist, als der Bogen EK war: ziehe auch auf diesen Sector BFA den Sinus BH des Bogen BA, welcher Sinus auf dem Radius AF des Sectors perpendicular stehen wird. Nun diesen Sector BFA leime man zwischen die Quadranten dergestalt hinein, daß der Bogen AB auf dem untern Quadranten CAK perpendicular aufstehe, und sein Spitz F mit F der Quadranten zusammentreffe. Viertens: Aus dem Punkt B, wo der Bogen BA den obern Quadranten CBE anstößt, ziehe man an dessen Fläche die Linie BI parallel mit dem Radius FE des Quadranten. NB. BI wird auf dem Radius FC perpendicular stehen, eben wie der Radius EF mit dem Radius FC am Quadranten EFC perpendicular ist. Folglich ist die Linie BI auch der Sinus des Bogen BC. Fünftens: Man ziehe auch noch von I auf dem untern Quadranten die Linie IH, welche mit dem Radius FK parallel laufen wird: indem IB parallel zu FB ist gemacht worden; und auch BH parallel zu EG ist: weil sowohl BH als EG auf dem untern Quadranten gerad in die Höhe stehen: jene Triangel aber, deren zwo gerade Linien gegeneinander parallel sind, auch die dritte Linie (und ihre ganze Flächen) parallel haben: wenn sie auch noch zween Winkel gleich haben, wie da in den Triangeln FEG und IBH die Winkel bey G und H gerad sind, und die

die Winkel EFG und BIH gleich sind, weil sie durch die parallele Neigung der Linien FE und IB an der nämlichen Fläche des Quadranten EFC sich gestalten. Diesemnach sind dann NB. die geradlinichte Triangel EFG, und BIH ähnlich. Sechstens: Verzeichnet man endlich einen geradlinichten Triangel nach Maaß der drey Linien BI, IH, HB; schneidet ihn aus, und leimet ihn nach eben diesen Linien zwischen die Bögen hinein, so hat man für das erste Theorem die ganze Vorbereitung.

§. 85. I. Haupttheorem. Wenn Fig. 22. zween Quadranten CE, CK mit einem Bogen EK den Triangel CEK ausmachen, und zwischen darinn ein Bogen AB auf dem untern Quadranten CK gerad aufsteht, wodurch der kleinere Triangel CAB rechtwinklicht bey A entsteht, dem der Quadrant CE und dessen Segment CB entgegensteht, und der Bogen AB an das Segment CB bey B anstößt; so sage ich:

Der Sinus des Quadranten CE, der dem geraden Winkel A gegenüberliegt, ist
zum Sinus seines Segments CB
wie der Sinus des Bogen EK am Quadranten
zum Sinus des Bogen BA am Segmente.

Beweis. In den ähnlichen Triangeln FEG, und BIH ist FE zu BI wie EG zu BH. Nun ist FE (als Radius) der Sinus des Quadranten: BI ist der Sinus des Bogen CB, als des Segments:

EG

EG ist der Sinus des Bogen EK, der am Quadranten anstößt, und BH ist der Sinus des Bogen BA, der am Segmente anstößt. Folglich ist der Sinus des dem geraden Winkel A gegenüberliegenden Quadranten, zum Sinus seines Segments CB; wie der Sinus des Bogen am Quadranten zum Sinus des Bogen am Segmente CB. W. Z. E. W.

§. 86. Zusatz. In jedem geradwinklichten Triangel als Fig. 22. BAC ist Sinus totus zum Sinus der Hypothenuse BC; wie der Sinus des schiefen Winkels C zum Sinus der dem Winkel gegenüberstehenden Seite AB, nämlich R: ſBC = ſC: ſAB.

Der Beweis dieser Analogie ist ganz und gar einer mit unserm des Theorems: denn der Sinus totus ist eins mit dem Sinus eines Quadranten. Der Sinus der Hypothenuse ist eins mit dem Sinus des Segments CB: weil dieses Segment eben die Hypothenuse ist. Der Sinus des Winkels C ist eins mit dem Sinus des Bogen EK am Quadranten: weil dieser des Winkels Maaß ist, wie in der Vorbereitung ist gezeigt worden. Endlich ist auch der Sinus der Seite AB eins mit dem Sinus des Bogen AB am Segmente: weil eben dieser Bogen die dem Winkel C gegenüberstehende Seite im Triangel CAB ist.

Anmerkung. Alle Authoren nehmen diesen Zusatz selbst für das Haupttheorem an, und schweigen

gen vom unsern. Ich wollte aber jenes Theorem dennoch voraussetzen, aus Ursach, weil in der zweyten Analogie der dritte Satz für den Winkel C erst auf die Substitution des Bogen EK sich gründet, und demnach unser Theorem stiller Weise voraussetzet, zumal da unser Beweis geradezu, und mithin deutlicher vor Augen liegt. Endlich hat unser Theorem durch Vergleichung des grossen Triangels ECK mit dem kleinern BCA eine gewisse Gleichförmigkeit mit der Vergleichung der Theile an geradlinichten Triangeln, welches mir etwas, weiß nicht was, einleichtendes zu geschwinderer Faßlichlichkeit der Analogien in den krummlinichten Triangeln geschienen hat.

§. 87. Die Analogie des Zusatzes gielt für die Seite CA durch den Winkel B auf gleiche Weise nämlich R : ſBC = ſC : ſAB, wie gesagt ist worden: also ist auch R : ſBC : ſB : ſAC, und wäre leicht zu beweisen, wenn die Bögen BC und BA abwärts verlängert würden, daß beyde Quadranten wären: denn alsdann entstünden die Sätze abwärts für den Winkel B und die entgegenstehende Seite: wie im vorgehenden die Sätze aufwärts für den Winkel C und seine Gegenseite BA entstanden sind. Dieses sey aber genug bemerket zu haben.

Itzt kommen wir auf die Vorbereitung zum zweyten Haupttheorem in der 23sten Figur. Man lege erstens abermal einen Halbzirkel aus starkem

kem Papier nach zween Quadranten zusammen. Zweytens: Man beschreibe einen Sector EFD, wie vormals, beschreibe aber am Ende D seinen Tangenten DL, wodurch der Triangel FLD entsteht, den man ausschneiden, und an die Radios FE und FD anleimen muß. Eben so beschreibe man den Sector BFA, und am Ende A seinen Tangenten AO perpendicular auf AF, schneide nachmals den entstehenden Triangel OFA aus, stecke ihn zwischen die Bögen, und leime ihn also hinein, daß bey A gerade Winkel entstehen, und der Punkt B des Sectors an den Bogen CE anstosse. Drittens: Aus dem Punkt A beschreibe man auf dem untern Quadranten die Linie AM perpendicular zum Radius FC, und folglich parallel zum Radius FD, weil auch FD und FC perpendicular stehen. Demnach ist die Linie AM der Sinus des Bogen AC, und ist mit dem Tangenten AO des Bogen AB perpendicular. Viertens: Mit dem Maaß der Linien OA, und AM beschreibe man einen geradwinklichten Triangel MAO, schneide ihn aus, und leime ihn über jene Linien zwischen die Bögen hinein. Hierdurch entstehen abermal zween geradlinichte Triangel LFD, OMA, welche wegen ihren parallelen Linien ähnlich sind. Nun so ist die Vorbereitung geschehen.

§. 88. II. Haupttheorem. Wenn Fig. 23. zween Quadranten CE, CD mit einem Bogen ED

den

den Triangel CED ausmachen, zwischen welchen ein Bogen AB am Punkt A gerad aufsteht, und den bey A rechtwinklichten Triangel CAB ausmachet, auch von dem an ihn anstossenden Quadranten CD das Segment AC abschneidet; so sage ich:

Der Sinus des Quadranten CD, der am geraden Winkel anstößt, ist

zum Sinus seines Segments CA:

wie der Tangens des Bogen ED am Quadranten

zum Tangens des Bogen AB am Segmente.

Beweis. In den ähnlichen Triangeln FDL und MAO ist FD zu MA wie DL zu AO. Nun aber ist FD (als Radius) der Sinus des Quadranten: MA ist der Sinus des Bogen CA, als des Segments; DL ist der Tangens des Bogen DE, der am Quadranten anstößt: und AO ist der Tangens des Bogen AB, der am Segmente anstößt. Folglich haben wir. W. Z. E. W.

§. 89. Zusatz. In jedem geradwinklichten Triangel als BAC Fig. 23. ist Sinus totus zum Sinus der einen Seite AC; wie der Tangens des schiefen Winkels C, welcher an dieselbe Seite anstößt, zum Tangens der Seite (die dem Winkel gegenübersteht,) AB. Nämlich $R : \int AC = t\,C : t\,AB$.

Der Beweis dieser Analogie ist abermal die nämliche des Theorems: denn der Sinus totus ist eins mit dem Sinus eines Quadranten. Der Sinus

der

der Seite AC ist eins mit dem Sinus des Segments AC. Der Tangens des schiefen Winkels C ist eins mit dem Tangens des Bogen DE; weil dieser des Winkels Maaß ist. Endlich ist auch der Tangens der Seite AB eins mit dem Bogen AB, weil eben dieser Bogen dem Winkel C gegenübersteht.

Anmerkung. Warum auch da ein ungewöhnliches Theorem zum Grund gelegt worden, ist schon oben gemeldet worden.

§. 90. Auf gleiche Weise gilt die Analogie des Zusatzes für den Winkel B und die Seite CA, nämlich gleichwie $R : \int AC = tC : tAB$
also ist auch $R : \int AB = tB : tAC$
Wie diese Verwechslung könne bewiesen werden, ist auch oben §. 87. angezeigt worden.

§. 91. III. Theorem. In jedem rechtwinklichten √. Triangel sind die Sinus der Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

*) Fürohin werde ich allzeit die einem Winkel gegenüberstehende Seite, seine Gegenseite, und hingegen den einer Seite gegenüberstehenden Winkel ihren Gegenwinkel Kürze halber Gegenwinkel nennen.

Nun so sey Fig. 13. im geradwinklichten Triangel BAC eine Seite AB; ihr Gegenwinkel C; die andere Seite AC, ihr Gegenwinkel B: so sage ich, es ist $\int AB : \int AC = \int C : \int B$. Dieß ist der Satz des Theorems.

Be-

Beweis. Es ist R:∫BC=∫C:∫AB
und R:∫BC=∫B:∫AC §. 86.

Weil dann die ersten zwey Glieder dieser Analogien gleich sind, so sind auch die zwey letztern in der nämlichen Proportion.

Folglich ist ∫C:∫B=∫AB:∫AC
transponendo . . . ∫AB:∫AC=∫C:∫B.
W. Z. E. W.

§. 92. In dieseu dreyen Theoremen §.86. §.89. §.91. ist der Grund enthalten, wie alle geradwinklichte Triangel sollen aufgelöset werden. Wenn denn in der Analyse vom §. 119. *sc*, das ist Sinus complementi, oder *tc*, das ist tangens complementi vorkömmt, so ist die Ursache, daß dort die Theile des Triangels AOB nicht unmittelbar, sondern durch Substitution eines andern anstoßenden Triangels müssen bestimmt werden, wie itzt folgendes Lemma mit den daraus folgenden Corollarien diese Verwechslung der Triangel zeigen wird.

§. 93. Lemma. Fig. 24. Ist ein in D geradwinklichter Triangel BDC, dessen jede Seite < 90° ist, und verlängert man erstens die Hypothenuse BC, und die Seite DC so, daß CG und CI Quadranten seyen; zweytens, verlängert man auch die Seite BD so, daß BF ein Quadrant sey, drittens beschreibt man aus B als Pole den Bogen FEAH, und viertens aus C als Pole den Bogen

GIH: so entstehen zween andere Triangel CEA, und AIH, deren einige Theile gleich sind den Theilen des Triangels BDC, und einige die Complemente seiner andern Theile werden.

Beweis. Weil der Bogen FEH aus B als seinem Pole ist gezogen worden; so sind BF und BE Quadranten, und ist demnach BEH ein gerader Winkel.

Gleichfalls, weil der Bogen HIG aus C als seinem Pole ist gezogen worden; so sind CI und CG Quadranten, die auf HIG perpendicular stehen, und demnach ist auch HIA ein gerader Winkel.

Abermal, weil der Bogen AF aus B als seinem Pole ist gezogen worden, und der Bogen AD bey D einen geraden Winkel machet: so sind beyde Bögen AF und AD perpendicular auf dem Bogen BDF, und ist demnach A der Pol eben dieses Bogen BDF: und sind auch die Bögen AD und AF Quadranten.

Endlich; weil die beyden Bögen EH und GH auf dem Bogen GB perpendicular stehen: so ist der Punkt H der Pol des Bogens GE, und sind die Bögen HE und HG auch Quadranten.

Demnach sind die Bögen BF, BE, CG, CI, HE, HG, AD, AF jeder ein Quadrant.

Dieses vorausgesetzt ist zu beweisen, daß die Theile an den Triangeln AEC und AIH den Theilen

len am Triangel BDC einige gleich, und die übrigen deren Complemente sind.

I. Beweis am Triangel AEC. Erstens, der Winkel E als gerad ist gleich dem geraden Winkel B. Zweytens, der Winkel ACE ist gleich dem Verticalwinkel BCD. Drittens, der Winkel CAE (dessen Maaß der Bogen FD ist) ist das Complement des Bogen DB; weil DF das Complement ist des Bogen DB zum Quadranten. Viertens, die Seite EC ist das Complement der Hypothenuse CB: weil EB ein Quadrant ist. Fünftens, die Hypothenuse AC ist das Complement der Seite CD; weil AD ein Quadrant ist. Sechstens, endlich ist die Seite AE gleich dem Complement des Winkels DBC: denn dessen Maaß ist der Bogen FE; und FE ist das Complement der Seite EA; weil FA ein Quadrant ist.

II. Beweis am Triangel AIH. Erstens, der gerade Winkel I ist gleich dem geraden Winkel D. Zweytens, der Winkel HAI ist gleich dem Verticalwinkel DAF, dessen Maaß der Bogen DF ist; weil denn DF das Complement der Seite DB ist, so ist der Winkel HAI gleich dem Complement der Seite DB. Drittens, der Winkel IHA ist gleich der Hypothenuse BC: denn sein Maaß ist der Bogen GE: und EG ist gleich dem Bogen CB: indem CE das gemeinsame Complement ist des Quadranten BE und des Quadranten CG. Viertens,

die Hypothenuse HA, welche gleich ist dem Bogen EF (weil der Bogen AE das gemeinsame Complement ist des Quadranten HE und des Quadranten AF) ist auch gleich dem Winkel DBC; weil der Bogen EF sein Maaß ist. Fünftens, die Seite HI ist gleich dem Complement des Winkels BCD: denn BCD ist gleich seinem Verticalwinkel ICG, dessen Maaß GI das Complement ist des Bogen IH. Sechstens endlich ist die Seite AI gleich der Seite CD, weil der Bogen AC das gemeinsame Complement ist des Quadranten CI, und des Quadranten AD. Demnach ist alles erwiesen. W. Z. E. W.

*) In diesem Lemma ist der Grund folgender Zusätze, in deren Analogien *s* oder *ſ* den Sinus: *t* oder *T* den Tangens: *sc* den Sinus Complementi, oder Cosinus, und *tc* den Tangens Complementi oder Cotangens bedeutet.

Corollaria.

Figur. 24.

§. 94. I. Im Triangel AEC ist

$$(R:ſAC = ſC:ſAE)$$

aus §. 86. Welche Analogie sich im Triangel BDC aus vorigem Lemma in diese verändert:

$$R:scDC = sC:scB.$$

Demnach gleichfalls ist im Triangel AEC:

$$R:scDB = sB:scC.$$

Das

Das heißt: der Sinus totus
ist zum Cosinus einer Seite
wie der Sinus des an die Seite stoßenden Winkels
zum Cosinus des Gegenwinkels jener Seite.

§. 95. Fig. 24.

II. Im Triangel AEC ist;

$R : \int AC = \int A : \int CE.$ §. 86.

Folglich im Triangel BDC;

$R : scDC = scDB : scBC$

$R : scDB = scDC : scBC$

das heißt: der Sinus totus
ist zum Cosinus einer Seite
wie der Cosinus der andern Seite
zum Cosinus der Hypothenuse.

§. 96. Fig. 24.

Im Triangel AEC ist;

$\int A : \int CE = \int C : \int AE.$ §. 91.

Und so im Triangel BDC;

$scDB : scBC = \int C : scB$

gleichfalls $scDC : scBC = \int B : scC.$

Das heißt: Sinus Complementi einer Seite ist
zum Sinus Complementi der Hypothenuse:
Wie der Sinus des Gegenwinkels jener Seite
zum Sinus Complementi des andern Winkels.

§. 97. Fig. 24.

Im Triangel AIH ist

$R:sAH = sA:sIH.$ §. 86.

Folglich im Triangel BDC;

$R:sB = scDB:scC.$

Gleichfalls $R:sC = scCB:scB.$

Das heißt: Sinus totus ist
zum Sinus eines Winkels:
Wie Sinus Complementi der anstoßenden Seite
zum Sinus Complementi des andern Winkels.

§. 98. Fig. 24.

Im Triangel AIH ist

$R:sAH = sH:sAI.$ §. 86.

Folglich im Triangel BDC;

$R:sB = sBC:sCD.$

Gleichfalls $R:sC = sBC:sBD.$

Das heißt: Sinus totus ist
zum Sinus eines Winkels:
Wie Sinus der Hypothenuse
zum Sinus der Gegenseite jenes Winkels.

§. 99. Fig. 24.

Im Triangel AIH ist

$sA:sIH = sH:sIA.$ §. 91.

Folglich im Triangel BDC;

$scDB:scC = sBC:sCD.$

Gleichfalls; $scDC:scB = sBC:sBD.$

Das

Das heißte Sinus Complementi einer Seite
ist zum Sinus Complementi des Gegenwinkels:
Wie Sinus der Hypothenuse
zum Sinus der andern Seite.

§. 100. Fig. 24.

Im Triangel AEC ist

$R : sAE = tA : tCE$. §. 89.

Folglich im Triangel BDC;

$R : sc B = tc DB : tc BC$.

Gleichfalls $R : sc C = tc DC : tc BC$.

Das ist: Sinus totus ist
zum Sinus Complementi eines Winkels:
Wie Tangens Complementi der anstoßenden Seite
zum Tangens Complementi der Hypothenuse.

§. 101. Fig. 24.

Im Triangel AEC ist

$R : sAE = tC : tAE$. §. 89.

Folglich im Triangel BDC;

$R : sc BC = tC : tc B$.

Gleichfalls $R : sc BC = tB : tc C$.

Das ist: Sinus totus ist
zum Sinus Complementi der Hypothenuse:
Wie Tangens eines Winkels
zum Tangens Complementi des andern Winkels.

§. 102. Fig. 24.

Im Triangel AIH ist;

$R : \int IH = t\,H : t\,IA.$ §. 89.

Folglich im Triangel BDC;

$R : sc\,C = t\,BC : t\,DC.$

Gleichfalls $R : sc\,B = t\,BC : t\,DB.$

Das ist: Sinus totus ist
zum Sinus Complementi eines Winkels:
Wie Tangens der anstoßenden Seite
zum Tangens der Gegenseite jenes Winkels.

§. 103. Fig. 24.

Im Triangel AIH ist;

$R : \int AI = t\,A : t\,IH.$ §. 89.

Folglich im Triangel BDC;

$R : \int DC = tc\,DB : tc\,C.$

Gleichfalls $R : \int DB = tc\,DC : tc\,B.$

Das ist: Sinus totus ist
zum Sinus einer Seite:
Wie Tangens Complementi der andern Seite
zum Tangens Complementi des Gegenwinkels dieser Seite.

*) Weil alle diese Analogien auch transponendo und invertendo wahr sind, daher können die mehresten Triangel auf verschiedene Art aufgelöset werden.

Siebentes Hauptstück.

Theorie über die Sinus und Tangentes in schiefwinklichten sphärischen Triangeln. ABC. Fig. 18. & 19.

§. 104. I. Theorem.

Wenn am Triangel ABC ein Perpendicularbogen AD auf die Basin BC gezogen wird; so sind die Sinus der Segmente BD, und CD der Basis umgekehrt, wie die Tangentes der Winkel B und C an der Basi, das heißt:

$$sBD : sCD = tC : tB.$$

Beweis für den Fall Fig. 18. wo der Perpendikelbogen AD in den Triangel hineinfällt.

Es ist im Triangel ABD;

$$R : sBD = tB : tAD. \quad §. 89.$$

Und im Triangel ACD;

$$R : sCD = tC : tAD. \quad §. 89.$$

Folglich ist im ersten:

$$R \times tAD = sBD \times tB$$

im zweyten:

$$R \times tAD = sCD \times tC.$$

Denn Facta extremorum = Factis mediorum: und weil in diesen Aequationen die ersten Glieder gleich sind, so sind auch die zweyten gleich.

Demnach ist $sBD \times tB = sCD \times tC$. welche Aequation, wenn sie in eine Analogie aufgelöset wird, so entsteht $sBD : sCD = tC : tB$. das ist, die Sinus der Segmente BD und CD sind mit den Tangenten ihrer anstoßenden Winkeln umgekehrt in Proportion. W. Z. E. W.

Beweis für den Fall Fig. 19. Wo der Perpendikelbogen AD außer den Triangel ABC auf die verlängerte Basin auftrifft.

Es ist im Triangel ADC;

$$R : sCD = tC : tAD. \quad \text{§. 89.}$$

Und im Triangel ADB;

$$R : sBD = tB : tAD. \quad \text{§. 89.}$$

Demnach wiederum im ersten:

$$R \times tAD = sCD \times tC$$

im zweyten:

$$R \times tAD = sBD \times tB.$$

Folglich, wie vorher $sCD \times tC = sBD \times tB$, und die Aequation in eine Analogie aufgelöset, so ist $sCD : sBD = tB : tC$. W. Z. E. W.

§. 105. II. Theorem. Wenn am Triangel ABC ein Perpendikelbogen AD an die Basin BC gezogen wird, so sind die Tangentes der Segmente BD und CD geradezu, wie die Tangentes der Winkel BAD : CAD am Vertex A; das ist, $tBD : tCD = tBAD : tCAD$.

Be-

Beweis für den Fall Fig. 18. wo der Perpendikelbogen AD in den Triangel hineinfällt.

Am Triangel ADB ist

$R:sAD=tBAD:tBD$. §. 89.

am Triangel ADC ist

$R:sAD=tCAD:tCD$. §. 89.

Weil die zwey ersten Glieder der Analogien denn gleich sind, so sind die zwo letzten auch in Proportion, und ist also $tBAD:tCAD=tBD:tCD$, und trausponendo $tBD:tCD=tBAD:tCAD$.

Beweis für den Fall Fig. 19. wo AD über den Triangel ABC hinausfällt.

Am Triangel ADB ist

$R:sAD=tBAD:tBD$. §. 89.

am Triangel ADC ist

$R:sAD=tCAD:tCD$. §. 89.

Folglich ist wiederum $tBAD:tCAD=tBD:tCD$, und transponendo $tBD:tCD=tBAD:tCAD$. W. Z. E. W.

§. 106. III. Theorem. Wenn am Triangel ABC Fig. 26. der Perpendikelbogen AD auf BC gezogen wird, so sind die Sinus Complementorum der Winkel *BAD*, und *CAD* am Vertex A geradezu, wie die Tangentes Complementorum der Seiten AB und AC, das ist; $scBAD:scCAD=tcAB:tcAC$.

Be-

Beweis. Man mache $AF, AE, AG, FI, FK, DI, DK$ lauter Quadranteu; so sind an $F. D. E. G.$ gerade Winkel.

Nota:
- EI ist das Complement des Winkels EAF
- GK ist das Complement des Winkels GAF
- BE ist das Complement der Seite AB
- CG ist das Complement der Seite AC

Nun ist am Triangel IBE

$$R : tI = sEI : tBE. \quad §. 89.$$

und am Triangel KCG

$$R : tK = sGK : tCG. \quad §. 89.$$

Da nun in diesen Analogieu die zwey ersten Glieder überall gleich sind (indem der Winkel I gleich ist dem Winkel K, weil die Bögen DI, DK, FI, FK lauter Quadranten sind, und demnach der Bogen DF ihr gemeinsames Maaß ist) so sind auch die zwey letzten Glieder in Proportion, und ist demnach $sEI : sGK = tBE : tCG$, welche Analogie gemäß der Nota also lauten wird:

$sEI =$	Sin. Compl. des Winkels EAF	$sc\,BAD$
$: sGK =$	Sin. Compl. des Winkels GAF	$sc\,CAD$
$= tBE =$	Tang. Compl. der Seite AB	$tc\ AB$
$: tCG =$	Tang. Compl. der Seite AC	$tc\ AC$

Beweis für den Fall Fig. 27. wo der Perpendikelbogen außer dem Triangel ABC fällt. Nachdem man die Quadranten AF, AE, AG, DI, FI gezogen hat, da denn die Winkel bey F, E, G, D gerade Winkel sind.

So

So ist im Triangel CGI

$$R : tI = sGI : tCG. \quad §.89.$$

und im Triangel BGI

$$R : tI = sEI : tBE. \quad §.89.$$

Folglich $sGI : sEI = tCG : tBE$. und inversim $sEI : sGI = tBE : tCG$. das heißt abermal:

$sEI =$ Sin. Compl. des Bogen $EF = EAF$
$: sGI =$ Sin. Compl. des Bogen $GF = GAF$
$= tBE =$ Tang. Compl. der Seite AB
$: tCG =$ Tang. Compl. der Seite AC. W. Z. E. W.

§. 107. IV. **Theorem.** Wenn am Triangel ABC in Fig. 26. der Perpendikelbogen AD gezogen wird, so sind die Sinus Complementorum der Seiten AB und BC geradezu, wie die Sinus Complementorum der Segmenten DB und DC der Basis BD, das ist, $scAB : scAC = scBD : scCD$.

Beweis in Fig. 26. Nachdem die Quadranten gezogen worden, wie im III. Theoreme: so ist

Nota:
$I = K = DF$ dem Complement des Bogen AD
$IB =$ dem Complement des Segments BD
$EB =$ dem Complement der Seite AB
$CK =$ dem Complement des Segments CD
$CG =$ dem Complement der Seite AC

Nun ist im Triangel IEB

$$R : sI = sIB : sEB. \quad §.86.$$

und im Triangel KGC

$$R : sK = sKC : sGC. \quad §.86.$$

Weil

Weil nun $I = K$; so sind die zwey ersten Glieder der Analogien beyderseits gleich, und folglich die zwey letztere in Proportion. Und

ist demnach $sIB : sKC = sEB : sGC$

transponendo $sEB : sGC = sIB : sKC$, das ist gemäß der Nota $scBA : scCA = scBD : scCD$.

Beweis für den Fall Fig. 27. wo der Perpendikelbogen AD außer dem Triangel ABC fällt, nachdem die Quadranten, wie im vorigen Theorem gezogen worden: so ist

Nota { *CI* das Complement des Segments *CD*
CG das Complement der Seite *AC*
BI das Complement des Segments *BD*
BE das Complement der Seite *AB*.

Nun ist im Triangel IGC

$R : sI = sCI : sCG$. §. 86.

und im Triangel BEI

$R : sI = sBI : sBE$. §. 86.

Folglich ist $sCI : sBI = sCG : sBE$

invertendo $sBE : sCG = sBI : sCI$, das ist gemäß der Nota $scAB : scAC = scBD : scCD$.

W. Z. E. W.

---

§. 108. Lemma. Der Radius ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Tangens und dem Tangens Complementi eines Bogen.

Es sey Fig. 21. *AB* der Bogen, *EB* sein Complement, der Tangens des ersten *AC*: der

Tan-

Tangens des zweyten EF: so sage ich, es sey $AC:AD=AD:EF$.

Beweis. Die Triangel DAC und DEF sind ähnlich: denn die Winkel ADF und EFD sind altern; wie auch die Winkel ACD und EDF, weil die Linien AD und EF, auch DE zu CA parallel sind. Demnach ist

$CA:AD=ED:EF$; und weil $AD=ED$; weil sie Radii sind, so ist $CA:AD=AD:EF$. W. Z. E. W.

§. 109. II. Lemma. Die Tangenten zweener Bögen stehen mit den Tangenten der Complemente jener Bogen in verkehrter Proportion. Fig. 25.

Beweis. $\left.\begin{array}{l}\text{N. 1.}\ EA:AI=AI:DH \\ \text{N. 2.}\ FA:AI=AI:DG\end{array}\right\}$ aus §. 108.

$EA\times DH=AI^2$ aus N. 1. $FA\times DG=AI^2$ aus N. 2. Folglich ist $EA\times DH=FA\times DG$. Löset man diese Aequation in eine Analogie, so ist $EA:FA=DG:DH$.

Nun EA ist der Tang. des Bogen BA

DH der Tang. seines Complements $=BD$

FA ist der Tang. des Bogen CA

DG der Tang. seines Complements $=CD$

welche Tangentes in der Analogie $EA:FA=DG:DH$ verkehrter stehen. W. Z. E. W.

§. 110. V. Theorem. Wenn Fig. 26. der Perpendikelbogen AD im Triangel ABC gezogen

ist.

ist, so sind die Tangenten der Seiten AB, AC umgekehrt, wie die Sinus Complementorum der Winkel BAD und CAD am Vertex A, das heißt

$$scBAD : scCAD = tAC : tAB.$$

Beweis. Es ist $scBAD : scCAD = tcAB : tcAC$ aus dem III. Theorem §. 106.

Nun sind die Tangenten dieser Bögen AB, AC umgekehrt, wie die tc, das ist, wie die Tangenten ihrer Complementen aus §. 109. Demnach kann man anstatt $tcAB : tcAC$ also setzen $tAC : tAB$. Folglich entsteht $scBAD : scCAD = tAC : tAB$. dieses war der Satz. W. Z. E. W.

*) So oft demnach in einer Analogie zwey Glieder einer Ration aus Cotangenten, oder hingegen aus Tangenten bestehen, so kann dieselbige in eine andere verändert werden, wodurch mehrmal vielerley Auflösungen der Triangel entstehen.

§. 111. VI. Theorem. Wenn Fig. 26. der Perpendikelbogen AD im Triangel ABC gezogen ist, so sind die Sinus der Winkel BAD und CAD am Vertex A geradezu, wie die Sinus Complementorum der Winkel B und C an der Basi, das heißt $sBAD : sCAD = scABD : scACD$. Beweis.

Im Triangel BAD ist

$$R : scAD = sBAD : scB. \quad §. 94.$$

Im Triangel CAD

$$R : scAD = sCAD : scC. \quad §. 94.$$

Weil

Weil denn in beyden Analogien die ersten Glieder gleich sind: so stehen die zwey andere in Proportion.

Demnach ist $s\,BAD : s\,CAD = sc\,B : sc\,C$.

W. Z. E. W.

Beweis. Im Fall der 27. Fig. wo der Perpendikelbogen außer den Triangel ABC fällt.

Im Triangel BAD ist

$$R : sc\,AD = s\,BAD : sc\,ABD.$$

Im Triangel CAD

$$R : sc\,AD = s\,CAD : sc\,ACD.$$

Demnach ist wieder:

$$s\,BAD : s\,CAD = sc\,B : sc\,C.$$

W. Z. E. W.

§. 112. VII. Theorem. Auch in schiefwinklichten Triangeln sind die Sinus der Winkel geradezu, wie die Sinus ihrer Gegenseiten.

Es sey Fig. 18. der Triangel ABC, dessen alle drey Winkel spitzig seyn, ich sage:

$$s\,B : s\,C = s\,AC : s\,AB.$$

Beweis. Wenn der Perpendikelbogen AD gezogen ist.

Im Triangel ADB ist

$$R : s\,AB = s\,B : s\,AD. \quad §. 86.$$

Im Triangel ADC

$$R : s\,AC = s\,C : s\,AD. \quad §. 86.$$

Im ersten ist also

$$R \times sAD = sAB \times sB.$$

Im zweyten

$$R \times sAD = sAC \times sC.$$

Demnach ist $sAB \times sB = sAC \times sC$: und wenn diese Aequation in eine Analogie gesetzt wird, so entspringt diese $sAB : sAC = sC : sB$. und invertendo $sB : sC = sAC : sAB$.
W. Z. E. W.

Beweis für den Fall Fig. 19. Wenn der Perpendikelbogen AD außer den Triangel ABC fällt, und demnach die Winkel ABC und ACB verschiedener Art sind.

Im Triangel ABD ist

$$R : sAB = sB : sAD. \quad §. 86.$$

Im Triangel ACD.

$$R : sAC = sC : sAD. \quad §. 87.$$

Im ersten ist also wiederum

$$R \times sAD = sAB \times sB.$$

Im zweyten

$$R \times sAC = sAC \times sC.$$

Demnach ist $sAB \times sB = sAC \times sC$. woraus die Analogie entspringt $sAB : sAC = sC : sB$, welche invertendo $sB : sC = sAC : sAB$.
W. Z. E. W.

§. 113. I. Lemma. Im gleichschenklichten sphärischen Triangel ABC, Fig. 30. ist der Tangens

BP,

BP, den man durch B zieht, parallel mit der Chorde CA der Basis CA.

Beweis. Die Chorden BA und BC sind gleich, weil ihre Bögen BEA und BFA gleich sind. So ist auch der Winkel PBA gleich dem Winkel BCA: denn dessen Maaß ist der halbe Bogen BEA des äußern Zirkels, auf dessen Peripherie seine Seiten CB, CA aufstehen: und jenes Winkels PBA sein Maaß ist auch der halbe Bogen BEA; weil er der Winkel zwischen dem Tangenten und der Chorde ist (ex Geometria). Endlich sind die Winkel BAC und BCA auch gleich, weil der Triangel gleichschenklicht ist. Demnach ist PBA = CAB als altern: und ist folglich PB parallel zu AC. W.Z.E.W.

§. 114. II. Lemma zur 31. Figur.

Wenn auf der Sphäre ein ungleichseitiger Triangel ABQ gegeben ist, und

N. 1. verlängert man den Bogen *AB* gegen *F*,

2. und machet *AD* = *AQ*:

3. So wird *BD* = *EQ*.

4. Machet man nachmals *BO* = *BQ*

5. und *DF* = *BO* = *BQ*:

6. So wird *BD* = *OF*: weil *DO* gemeinsam sowohl zu *BO*, als zu *DF* gehört. N. 5.

---

7. Theilet man itzt *DO* in *L* in zwo Helften *DL*, *LO*, und ziehet den Radius *Lmnk* bis ins Centrum der Sphäre;

und benamset die Seite AB mit Namen c
die Seite $AQ = AD$ heiße C
die Seite BQ als Basis heiße b.

8. So wird $BD = C - c$: weil $BD = AD - AB$.

9. und $DO = b - C + c$: weil $DO = BQ - BD$.

10. Folglich ist $DL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$: weil $DL = \frac{1}{2}DO$.

11. und $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - C$: weil $DL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$. (N. 10.)
Folglich ist $DL + C = \frac{1}{2}b + C - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$.
Folglich ist $DL = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - C$.

12. Das heißt: der Bogen DL ist die Differenz der größern Seite C (= AQ des Triangels) und der halben Summe aller dreyer Seiten. Oder, welches eines ist: der Bogen DL ist der Exceß der halben Summe aller dreyer Seiten b, C, c, über die am Winkel A anstoßende größere Seite C (= AQ).

---

13. Ferner ist $BL = BD + DL$
Und $DL = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - C$ (aus N. 12.)
Gleichfalls ist $BD = C - c$ (aus N. 8.)
Folglich ist $BL = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - C + C - c$, das ist: $BL = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - c$.

14. Das heißt: der Bogen BL ist die Differenz der kleinern Seite c (= AB des Triangels) und der halben Summe aller dreyer Seiten. Oder,

wel-

welches eines ist: der Bogen *BL* ist der Exceß der halben Summe aller dreyer Seiten *b*, *C*, *c*, über die am Winkel *A* anstoßende kleinere Seite *c* (=AB.)

---

15. Nun supponiere man zwo Chorden *DO*, *BF* durch die Sphäre, welche parallel seyn werden; weil die Bögen *BD* und *FO* gleich sind (aus N. 6.)

16. Weil *KL* der Radius ist (N. 7.) so wird *Dm* der Sinus des Bogen *DL*, und *Bn* der Sinus des Bogen *BL*.

17. Das ist: *Dm* ist der Sinus der Differenz der größern Seite AC von der halben Summe aller dreyer Seiten abgezogen (N. 12.)

18. Und *Bn* ist der Sinus der Differenz der kleinern Seite AB von der halben Summe aller dreyer Seiten abgezogen (N. 14.)

19. Man mache *AE* gleich *AB*, und supponiere die Chorde *BE*: auch ziehe man den Perpendikelbogen *AG*,

20. So wird der gleichschenklichte Triangel *BAE* in zween bey *G* rechtwinklichte *AGB* und *AGE* gleich abgetheilt:

21. Und ist *BI* der Sinus des halben Bogen *BGE*.

---

22. Gleichfalls ziehe man von *D* zu *Q* den Bogen *DHQ* und aus *A* den Perpendikelbogen *AH*, und supponiere die Chorde *DQ*.

23. So wird ebenfalls der in *H* geradwinklichte Triangel *AHD* gleich seyn dem andern *AHQ*:

24. Und ist *DK* der Sinus des halben Bogen *DHQ*.

---

25. Man ziehe die Chorden *EF*, *BF*: den Bogen *ORQ*: die Chorde *OQ*; den Tangens *PB* an die Circumferenz bey *B*, welche mit *OQ* parallel seyn wird. §. 113.

26. Itzt hat man zween flache Triangel *BEF*, und *DOQ*, welche einander ähnlich sind:

27. Denn die Winkel *EBF* und *CDO* sind gleich; weil *DO* mit *BF*, und *BE* mit *DQ* parallel sind.

Ferner ist der Winkel $PBF = DOQ$: weil *PB* mit *OQ* (§. 113.) und *DO* mit *BF* parallel ist.

Endlich ist auch der Winkel $PBF = BEF$: weil ihrer beyder Maaß der halbe Bogen *BF* ist.

28. Weil $EBF = QDO$ und $BEF = DOQ$ (N. 27.) so sind die ganze Triangel *BEF* und *DOQ* ähnlich; demnach ist

29. $BE : DO = BF : DQ$, und wenn man jedes Theils

30. die Hälfte nimmt, so ist auch $BI : Dm = Bn : DK$.

§. 115. VIII. Theorem. (Fig. 31.) Das Product aus den Sinibus der halben Bögen *BE*, *DQ* ist gleich dem Product aus den Sinibus der Differenzen

renzen der zweenen am Winkel A anstoßenden Seite AB, AQ von der halben Summe aller dreyer Seiten, AB, AC, BQ.

Beweis. Es ist $BI:DM = BN:DK$. (§. 114. N. 30.)

Demnach ist $BI \times DK = DM \times BN$.

Es ist aber $BI \times DK$ ein Product aus BI dem Sinus des halben Bogen BE (N. 21.) in den Sinus DK des halben Bogen DQ (N. 24.) Hernach ist $DM \times DN$ ein Product aus DM dem Sinus der Differenz der größern Seite AQ von der Halbsumme aller dreyer Seiten (N. 14.) Folglich sind die Producte gleich. W. Z. E. W.

§. 116. IX. Theorem. Fig. 31. Das Product aus den Sinibus zwoer Seiten eines Winkels (als A) ist zum Quadrat des Sinus totus:

Wie das Product aus den Sinibus der Differenzen dieser zwoer Seiten von der Halbsumme aller dreyer Seiten zum Quadrat des Sinus der Helfte ihres eingeschlossenen Winkels.

Beweis. Im Triangel AGB ist

$$R : sBA = sBAG : sBG.$$

im Triangel AHD

$$R : sAD = sDAH : sDH.$$

oder weil $AD = AQ$;

$$R : sAQ = sDAH : sDH.$$

Multipliciert man itzt die Glieder der ersten in die Glieder der dritten Analogie:

so wird:		und durch Verwechslung:	
Wie	$R \times R$	Wie	$sBA \times sAQ$
zu	$sBA \times sAQ$	zu	$R \times R$
also	$sBAG \times sDAH$	also	$sBG \times sDH$
zu	$sBG \times sDH$	zu	$sBAG \times sDAH$

Es ist aber $sBA \times sAQ$ das Product aus den Sinibus der zwoen Seiten AB, AQ.

$R \times R$ ist das Quadrat des Sinus totus.

$sBG \times sDH$ ist das Product aus den Sinibus der Bögen BG und DH: von welchem im VIII. Theorem §. 115. erwiesen ist, daß es gleich ist dem Product aus den Sinibus der Differenzen der zwoen Seiten AB, AC von der Halbsumme aller dreyer Seiten.

Und endlich ist $sBAG \times sDAH$ (gleichen Winkels) das Quadrat des Winkels $BAG = DAG$, der die Hälfte ist des ganzen Winkels A, oder $BAE = DAQ$.

Demnach hat man die Analogie des Theorems. W. Z. E. W.

§. 117. Lemma. Fig. 31. Im Triangel ABC ist die Basis $BQ = b$ die grössere Seite $AQ = C$, und die kleinere Seite $AB = c$ genennt worden. §. 114. N. 7.

Folg-

Folglich ist der Exceß der größern Seite über die kleine $= C - c$. und wenn dazu die Basis b addiert wird, so ist die Summe $= b + C - c$: demnach ist die Halbsumme der Basis und des gemeldeten Exceßes $= \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}c$, welches aus §. 114. N. 14. auch die Differenz ist der kleinern Seite von der Halbsumme der dreyen Seiten.

Subtrahiret man eben gemeldeten Exceß der größern Seite über die kleinere $= C - c$ von der Basis b, so wird $b - C + c$ herauskommen; und ist demnach die Differenz zwischen der Basis und dem gemeldeten Exceß $= b - C + c$. Demnach ist die halbe Differenz der gedachten Theile $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$, welches aus §. 114. N. 12. auch die Differenz ist der größern Seite von der Halbsumme der dreyen Seiten.

§. 118. X. Theorem. Fig. 31. Das Product aus den Sinibus der Seiten AB und AQ

$$= sAB \times sAC$$

ist zum Quadrat des Sinus totus $= R \times R$ wie das Product aus dem Sinus der Halbsumme der Basis b und des Exceßes $C - c$ in den Sinus der Halbdifferenze dieser Basis und dieses Exceßes, nämlich: wie $s\frac{b + C - c}{2} \times s\frac{b - C + c}{2}$ zum Quadrat des Sinus der Hälfte des Winkels A, nämlich $sBAG \times sDAH$.

 Be=

Beweis. Wenn man diese Analogie zusammensetzet, so steht sie also:

$$sAB \times sAQ : R \times R = \int\frac{b+C-c}{2} \times \int\frac{b-C+c}{2} : sBAG \times sDAH.$$

Vergleicht man diese Analogie mit jener des IX. Theorems, so ersieht man, daß das erste, zweyte und vierte Glied eben die nämlichen sind. Es ist aber auch jenes dritte Glied $sBG \times sDH$ gleich diesem dritten $\int\frac{b+C-c}{2} \times \int\frac{b-C+c}{2}$: denn aus vorherigem Lemma ist erwiesen, daß die Halbsumme $\frac{b+C-c}{2}$ gleich ist der Differenz der kleinern Seite von der Halbsumme aller drey Seiten, und daß die Halbdifferenz $\frac{b-C+c}{2}$ gleich ist der größern Seite von der Halbsumme der dreyen Seiten: aus welchen Theilen im IX. Theorem das dritte Glied besteht, wie dort ist erwiesen worden. Folglich entsteht die Analogie des Theorems. W. Z. E. W.

Zweyter Theil.

Praxis der sphärischen Trigonometrie.

Erstes Hauptstück.

Auflösung der geradwinklichten Triangeln.

§. 1.

Wenn ein sphärischer Triangel vorkömmt, von dem man weiß, daß einer ein gerader Winkel ist, so muß man vor allen auch noch aus §. 84. erforschen, von was Art seine übrigen Theile sind, wenn man es nicht schon aus der Aufgabe selbst erkennet, wie es mehrern Theils aus den miteingeflochtenen Zirkeln, und derer Lage auf dem Globus sogleich kann erkannt werden.

Ersieht man, daß die Theile alle $< 90°$ sind, und dem Zufolg zur Gattung des Triangels AQB Fig. 4. gehört, so beobachte man aus den angegebenen Bedingnißen, zu was für einem Problem der itzt folgenden die Aufgabe gehöre, und schreite zur Auflösung durch die alldort befindliche Analogie.

Hat

Hat man aber erkennt, daß der gegebene Triangel zu einer andern Gattung gehört (man weiß es aber sogleich, wenn entweder die Hypothenuse, oder ein Winkel, oder eine Seite größer als 90° angegeben ist) so bestimme man durch Vergleichung der Theile und ihrer Lage gegeneinander, zu was für einer Gattung der Triangel in der 4ten Figur er gehöre, damit er durch den Triangel AQB mittels einiger seiner Suplementen könne aufgelöset werden, wie §. noch deutlicher wird erkläret werden.

I. Problem.

Wenn gegeben sind: Beyspiel
Die *Hypothenusa* AB = 55°. 15'
und ein Winkel A = 50°. 0

Q. I. Die Gegenseite des Winkels. §. 119.
Wie Sinus totus
zum Sinus der Hypothenusa:
Also Sinus des gegebenen Winkels
zum Sinus der gesuchten Seite. BO = 39°. 1'

Q. II. Die anstoßende Seite am Winkel. §. 120.
Wie Sinus Complementi des gegebenen Winkels
zum Tangens Complementi der Hypotheuusa:

Also

Also Sinus totus | Beyspiel
zum Tang. Complem. der gesuchten Seite. | AO = 42°. 49'

Q. III. Der andere Winkel. | §. 121.
Wie Sinus totus
zum Sin. Complem. der Hypothenusa:
Also Tangens des gegebenen Winkels
zum Tang. Compl. des gesuchten Winkels. | B = 55°. 49'

II. Problem.

Wenn gegeben sind:
Ein Winkel | A = 56°. 11'
und seine Gegenseite | BO = 45. 0

Q. I. Die andere Seite. | §. 122.
Wie Tangens des gegebenen Winkels
zum Sinus totus:
Also Tangens der gegebenen Seite
zum Sinus der gesuchten Seite. | AO = 42°. 2'

Q. II. Der andere Winkel. | §. 123.
Wie Sin. Complem. der gegebenen Seite
zum Sin. Complem. des gegebenen Winkels:

Also

Also Sinus totus	Beyspiel
zum Sinus des gesuchten Winkels.	B = 51°.53
Q. III. Die *Hypothenusa.*	§. 124.
Wie Sinus des gegebenen Winkels	
zum Sinus der gegebenen Seite:	
Also Sinus totus	
zum Sinus der Hypothenuse.	AB = 58°.19′

III. Problem.

Wenn gegeben sind:	
Ein Winkel	A = 47°.27′
und seine anstoßende Seite	AO = 40. 0
Q. I. Der andere Winkel.	§. 125.
Wie Sinus totus	
zum Sin. Complem. der gegebenen Seite:	
Also Sinus des gegebenen Winkels	
zum Sin. Complem. des gesuchten Winkels.	B = 55°.39′
Q. II. Die andere Seite.	§. 126.
Wie Sinus totus	
zum Sinus der gegebenen Seite:	
Also Tangens des gegebenen Winkels	
zum Tangens der gesuchten Seite.	BO = 35°. 0′

Beyspiel

Q. III. Die Hypothenuse. §. 127.

Wie Sinus totus
zum Sin. Complem. des gegebenen Winkels:
Also Tang. Complem. der gegebenen Seite
zum Tang. Complem. der Hypothenuse. AB = 51°. 8′

IV. Problem.

Wenn gegeben sind:
Die *Hypothenusa* AB = 60°. 30′
und eine Seite AO = 50. 0

Q. I. Ihr Zwischenwinkel. §. 128.

Wie Tang. Complem. der gegebenen Seite
zum Tang. Complem. der Hypothenuse:
Also Sinus totus
zum Sin. Complem. des gesuchten Winkels. A. 47°. 36′

Q. II. Der Gegenwinkel der Seite. §. 129.

Wie Sinus der Hypothenuse
zum Sinus totus:
Also Sinus der gegebenen Seite
zum Sinus des gesuchten Winkels. B. 61°. 40′

Q. III.

Beyspiel

Q. III. Die andere Seite. §. 130.

Wie Sin. Complem. der gegebenen Seite

zum Sin. Complem. der Hypothenuse:

Also Sinus totus

zum Sin. Complem. der gesuchten Seite. BO = 40°. 0

V. Problem.

Wenn gegeben sind:

Die beyden Seiten AO = 40°. 0
BO = 25. 0

Q. I. Die *Hypothenuse*. §. 131.

Wie Sinus totus

zum Sin. Complem. der einten Seite:

Also Sin. Complem. der andern Seite

zum Sin. Complem. der Hypothenuse. AB = 47°. 40′

Q. II. Entwederer Winkel. §. 132.

Wie Sinus der Seite am gesuchten Winkel

zum Sinus totus:

Also Tangens der andern Seite A = 34°. 52′

zum Tangens des gesuchten Winkels. B = 64. 51

VI. Pro-

VI. Problem.

Wenn gegeben sind:	Beyspiel
Die beyden Winkel	A = 55°. 39′ B = 47°. 27′
Q. I. Die *Hypothenusa*.	§. 133.
Wie Tangens eines Winkels zum Sinus totus: Also Tang. Complem. des andern Winkels zum Sin. Complem. der Hypothenuse.	AB = 51°. 8′
Q. II. Die entwedere Seite.	§. 134.
Wie Sinus des Winkels an der gesuchten Seite zum Sinus totus: Also Sin. Complem. des andern Winkels zum Sin. Complem. der gesuchten Seite.	AO = 35°. 16′ BO = 40. 0

§. 135. I. Anmerkung. Es ist vor allem zu merken, daß in dem bisherigen Analysi oder Problemen supponirt wird, alle Theile, nämlich die Winkel sowohl als die Seiten (ausgenommen einen geraden Winkel) weniger als 90 Grade in dem vorgelegten Triangel haben. Aber es giebt noch zwo andere Gattungen geradwinklichter Triangel. Denn

Erstens, in der vierten Figur hat der bey E geradwinklichte Triangel BEA alle Theile jeden $>90°$; und nur die Hypothenuse AB ist $<90°$.

Zweytens, der bey E geradwinklichte Triangel FEA hat die Hypothenuse FA, die Seite AE, und den Gegenwinkel F jedes $>90°$: die Seite FE aber, und ihr Gegenwinkel A, sind jede $<90°$.

Drittens, der bey Q geradwinklichte Triangel FQA hat abermal die Hypothenuse FA; die Seite FQ, und ihren Gegenwinkel A, jedes $>90°$: die Seite AQ aber und ihr Gegenwinkel F, sind jede $<90°$.

§. 136. II. Anmerkung. Aus dem, was itzt ist gemeldet worden, erhellet erstens, daß die Triangel AEF und AQF gleich viele Theile der ähnlichen Art an sich haben. Zweytens, daß es überhaupt drey Gattungen geradwinklichter Triangel giebt, die in der vierten Figur alle enthalten sind.

Die erste Gattung ist jene am Triangel AQB, woran außer dem geraden Winkel alle Theile $<90°$ haben.

Die

r Analysi des geradwinklichten
ls AOB.

Figur.	Grund der Beweise.		
Fig. 43.	S E C	∽	B I V
Fig. 46.	T V C	∽	L I D
Fig. 48.	T V C	∽	L I D
Fig. 44.	T V C	∽	L O D
Fig. 47.	S E C	∽	L I V
Fig. 43.	S E C	∽	B I V
Fig. 50.	S E C	∽	L I V
Fig. 44.	T V C	∽	L O D
Fig. 46.	T V C	∽	L I D
Fig. 46.	T V C	∽	L I D
Fig. 49.	S E C	∽	A I D
Fig. 45.	O S C	∽	B I V
Fig. 45.	O S C	∽	B I V
Fig. 44.	T V C	∽	L O D
		∽	
Fig. 48.	T V C	∽	L I D
Fig. 47.	S E C	∽	L I V
		∽	

§. 135.

Die zwote Gattung ist jene im Triangel AEB, woran außer dem geraden Winkel und der Hypothenuse, die übrigen alle Theile $> 90^\circ$ sind.

Die dritte Gattung ist, wo nebst dem geraden Winkel und der Hypothenuse $> 90^\circ$, eine Seite und ihr Gegenwinkel jedes auch $> 90^\circ$: die andere Seite aber und ihr Gegenwinkel jedes $< 90^\circ$ sind.

§. 137. III. Anmerkung. Aus vorigem §. erscheint, daß, wenn in einem rechtwinklichten Triangel nebst dem geraden Winkel zween andere Theile bekannt sind, auch von den übrigen bestimmt sey, von was Art (das ist, ob ein jeder aus ihnen $> 90^\circ$ oder $< 90^\circ$) seyen: Nur der Fall (das II. Problem.) ist ausgenommen, wenn die bekannten Theile Gegentheile sind, das ist, wenn einer eine Seite, der andere sein Gegenwinkel ist; denn wenn (Fig. 4.) der spitzige Winkel A mit seiner Gegenseite $< 90^\circ$ gegeben ist, so weiß man daraus nicht, ob der Triangel AQB, oder der Triangel AEF verstanden ist. Und ist der stumpfe Winkel A mit seiner Gegenseite $> 90^\circ$ gegeben, so weiß man nicht, ob der Triangel ABE, oder aber AFQ verstanden wird.

§. 138. Wenn (Fig. 4.) an einem der Triangeln BEA, FEA, FQA nebst dem geraden Winkel zween andere Theile bekannt sind, so sind am

Triangel AQB eben so viele Theile bekannt: denn einige sind in den zweenen verglichenen Triangeln gleich, und die übrigen Theile sind im letzten Triangel AQB Supplemente der übrigen Theile der vorherigen Triangel. Z. B. Man vergleiche den Triangel BEA mit dem andern AQB, der Winkel E als gerad ist gleich dem geraden Winkel Q: und ist demnach AB die Hypothenuse aller beyden. Nachmals ist die Seite AE das Supplement von AQ: und die Seite EB ist das Supplement von BQ. Endlich ist der stumpfe Winkel EAB das Supplement des spitzigen BAQ: und der stumpfe ABE ist das Supplement des spitzigen ABQ.

§. 139. IV. Anmerkung. So oft demnach bey einer Aufgabe ein Triangel vorgelegt ist, dessen ein gegebener oder ein zusuchender Theil aus §. 84. oder auch aus §. 136. über 90° ist, so oft muß der Triangel BQA angenommen, und dessen Theile aus den gegebenen nach dem vorigen §. 135. bestimmt werden. Nachmals aber die gehörige Analogie aus dem Analysi §. 119. ꝛc. angewandt werden: denn also wird man im Triangel AQB einen Theil finden, der dem zusuchenden Supplement, oder aber ihm gar gleich seyn wird.

Zum Beyspiel: Es sey an einem Triangel gegeben die Hypothenuse $>90°$, und eine Seite auch $>90°$, und es sey zu suchen der Gegenwinkel der Seite.

Aus

Aus §. 84. N. 6. erkennt man, daß der gesuchte Winkel auch $> 90^\circ$ seyn muß; und aus §. 136. daß der gegebene Triangel zur Gattung FEA Fig. 4. gehöre; worinn die Hypothenuse FA $> 90^\circ$, und die Seite EA auch $> 90^\circ$ ist, und der Winkel AFE itzt zu suchen ist.

Demnach ist im Triangel BQA bekannt die Hypothenuse AB = dem Supplement von FA, und die Seite AQ = dem Supplement von AE. Suchet man nun im Triangel ABQ (durch §. 129.) den spitzigen Winkel ABQ: so ist nachmals sein Supplement = dem stumpfen Winkel F im Triangel FEA, der zu suchen war. Denn EFA = EBA dem Supplement von ABQ.

§. 140. Für alle derley Fälle muß man die Arten der Theile an den Triangeln der 4ten Figur vollkommen wissen, deßhalben wollen wir sie der Einbildungskraft zu Hülfe da in einer Tafel bestimmt hersetzen. Wobey die kleinen Buchstaben Theile andeuten, die $< 90^\circ$ sind; die Fracturbuchstaben aber Theile, die $> 90^\circ$ sind: Q bedeutet 90°, oder den geraden Winkel. Im letzten Spalt sind die Arten der Theile nochmal angezeigt, und bedeutet dort l eine Seite $< 90^\circ$: L eine Seite $> 90^\circ$: h eine Hypothenuse $< 90^\circ$: H eine Hypothenuse $> 90^\circ$: a einen spitzigen: o einen stumpfen; und r den geraden Winkel. Man merke auch noch, daß aller-

allerseits die untergeschriebene Winkel jenen Seiten entgegenstehen, unter denen sie geschrieben sind.

Fig. 4.

Triangul.		Nomin.	Partes	Species
1.	A Q B	Latera =	aq. q.b. ba	l. l. h
		anguli =	b. a. Q	a. a. r
2.	B E A	Latera =	AE. EB. ba	L. L. l
		anguli =	B. A. Q	O. O. r
3.	F E A	Latera =	ef. EA. FA	l. L. H
		anguli =	a. F. Q	a. O. r
4.	F Q A	Latera =	FQ. aq. FA	L. l. H
		anguli =	A. f. Q	O. a. r

§. 141. Es ist auch nothwendig, daß man den Zusammenhang der Theile dieser Triangel in der vierten Figur vollkommen inne habe, um bey vorkommender Substitution die gleichen Theile, oder die

die Supplemente geschwind zu wissen: Da folgen sie auch:

Latera	Latera	Anguli	Anguli	Anguli
bq = ef	bq + qf = 180	baq = eaf	baq + qaf	bqa + aqf
qf = be	qf + fe = 180	bqa = fqa	qaf + fae	aqf + afe
Anguli	fe + eb = 180	bea = fea	fae + eab	afe + aeb
bqa = 90	eb + bq = 180	qaf = bae	eab + baq	aeb + abq
bea = 90	ba + af = 180	qba = qfa	= 180	= 180.
fqa = 90	qa + ae = 180	eba = efa		
fea = 90				

Zweytes Hauptstück.

Von Auflösung der schiefwinklichten sphärischen Triangeln.

§. 142.

Schiefwinklichte sphärische Triangel, nämlich diejenigen, worinnen kein gerader Winkel befindlich ist, müssen in den Fällen oder den Bedingnissen der vier ersten folgenden Problemen allemal durch einen Perpendicularbogen in zween rechtwinklichte Triangel abgetheilt, und nachmals durch eine zweyfache Analogie entwickelt werden.

*) Dieser Perpendicularbogen ist nur alsdenn nicht vonnöthen, wenn man von gegebenen Theilen auf ihre entgegengesetzte schließen kann, wie §. 151. und §. 152. es geschieht; oder wenn alle drey Seiten, oder alle drey Winkel gegeben sind, wie es im §. 153. und §. 154. sich zuträgt.

I. Note. Die Ziehung der Perpendikularbogen ist also bey Auflösung der schiefwinklichten Triangeln für die vier ersten Problemen das wesentlichste Stück. Um aber zu wissen, von was für einem Winkel, und auf was für eine Seite er soll gefällt werden, so merke man folgende zwo Regeln.

II. Wenn die drey gegebenen Theile (denn so viel müssen bekannt seyn, damit die drey übrigen unbe-

unbekannten ausfindig können gemacht werden) aneinander angränzen, das heißt, wenn Winkel und Seiten so aneinander anstoßen, daß zwischen ihren dreyen gegebenen und bekannten kein unbekannter Winkel oder Seite zwischenliegt: Wenn, sage ich, die drey bekannten Theile aneinander anstoßen, so muß der Perpendikelbogen von jenem äußern der gegebenen Theile auf seinen Gegentheil gezogen werden, welcher äußere Theil dem zusuchenden nicht entgegengesetzt ist.

Sind aber die drey gegebenen Theile abgesondert (das ist, sind nicht alle drey aneinander angeschlossen, so daß zwischen ihnen kein unbekannter liegt, so muß der Perpendikelbogen auf den zusuchenden Theil auffallen, und von ihm an seinen Gegentheil gezogen werden.

III. Ist der Perpendikelbogen gemäß dieser Regeln gezogen, so nenne man den Winkel, wo er anstößt, allemal A, und den Perpendikel selbst AD; den gegebenen Winkel aber, der an jener Seite anliegt, welche auch an A anstößt, nenne man B; und den dritten Winkel nenne man C.

Anmerkung. Sind die Winkel B und C von einerley Art, so fällt der Perpendikelbogen AD in den gegebenen Triangel hinein.

Ist aber der Winkel B stumpf, und der Winkel B spitzig; so fällt der Perpendikelbogen AD außerhalb B auf die verlängerte Seite BC.

Ist denn aber der Winkel B stumpf, und der Winkel C spitzig; so fällt der Perpendikelbogen AD außerhalb C auf die verlängerte Seite BC.

*) Diese drey verschiedenen Fälle ersieht man in den Figuren I. II. III. Tabula wo überall der gegebene Triangel ABC heißt, und AD der Perperpendikelbogen ist.

IV. Man merke auch wohl, daß alle folgende Problemen so einen Triangel angehen, in welchem die gegebenen Seiten kleiner als Quadranten, das ist, $< 90^\circ$ sind: so oft demnach ein Triangel in die Frag kömmt, woran die gegebene, oder der zu bestimmende Theil (aus §. 84.) nachdem der Perpendikelbogen gezogen ist worden, größer als 90° zu seyn erkennet wird: so oft muß ein anderer anliegender Triangel substituirt, und mittels der Supplemente oder zum Theil gleicher Theile die Auflösung geschehen, auf ähnliche Art, wie oben §. 140. an geradwinklichten Triangeln angezeigt worden ist, und noch unten §. 155. mit mehrerm soll erkläret werden.

V. Nachdem diese Beobachtungen und Vorbereitungen geschehen, ist endlich zu erforschen, zu was für einem Problem der Fall gehöre, das ist, was für ein Problem mit ihren Titeln oder Bedingnissen übereinstimme mit den Bedingnissen des vorgelegten Falles. Nachmals handle man durch die

vorge-

vorgeschriebene Analogien der übereinstimmigen §§. der folgenden Analysis: denn es sind darinnen alle mögliche Fälle enthalten, NB. wenn man die Theile des gegebenen oder substituirten Triangels mit den Buchstaben A. B. C. D. nach jener Weise benamset, wie im III. N. dieses §. 143. ist Anleitung gegeben worden. Der Fall wird nach geschehener Vorbereitung zu einem der folgenden VIII. Problemen gehören.

Problemata

an schiefwinklichten V. Triangeln.

Wenn gegeben sind:

I. Zwey Winkel, und ihre Zwischenseite,
zu finden den dritten Winkel, §. 143.
oder eine Seite. §. 144.

II. Zwey Seiten, und einer ihrer Gegenwinkel,
zu finden den Zwischenwinkel, §. 145.
oder die dritte Seite. §. 146.

III. Zwey Winkel, und eine ihrer Gegenseiten,
zu finden den dritten Winkel, §. 147.
oder die Zwischenseite. §. 148.

IV. Zwey Seiten, und ihr Zwischen-
winkel,
zu finden einen Winkel, §. 149.
oder die dritte Seite. §. 150.

V. Zwey Seiten, und einer ihrer Gegen-
winkel,
zu finden den Gegenwinkel der andern
Seite. §. 151.

VI. Zwey Winkel, und eine ihrer Gegen-
seiten,
zu finden die Gegenseite des andern
Winkels. §. 152.

VII. Alle drey Seiten,
zu finden jeden der drey Winkel. §. 153.

VIII. Alle drey Winkel,
zu finden jede der drey Seiten. §. 154.

Nota. In folgender Analysi geht die erste Analogie allemal auf den geradwinklichten Triangel ABD, der durch den Perpendikelbogen AD entsteht.

YSIS

Triangels ABC.

Zweyter Theil.

	Beweise der Analogie.	
	aus §. 121. und	§. 111.
C	§. 121.	§. 110.
AD	§. 121.	§. 110.
D	§. 127.	§. 107.
AD	§. 121.	§. 111.
D	§. 127.	§. 101.
	§. 127.	§. 101.
C	§. 127.	§. 107.

V. Pro-

V. Problem. §. 151.

Wenn gegeben sind zwey Seiten, und
der Gegenwinkel einer dieser Seite,
zu finden die Gegenwinkel der Seiten.

Wie Sinus einer gegebenen Seite
zum Sinus des Gegenwinkels dieser Seite:
Also Sinus der andern Seite
zum Sinus des Gegenwinkels. aus §. 112.

*) Nota. Es muß vorhinein bekannt seyn die Art des zusuchenden Winkels.

VI. Problem. §. 152.

Wenn gegeben sind zwey Winkel, und
die Gegenseite einer dieser Winkel,
zu finden die Gegenseiten der Winkel.

Wie Sinus eines gegebenen Winkels
zum Sinus der Gegenseite dieses Winkels:
Also Sinus des andern gegebenen Winkels
zum Sinus der Gegenseite. aus §. 112.

*) Nota. Es muß vorhinein bekannt seyn die Art der zusuchenden Seite.

VII. Problem. §. 153.

Wenn gegeben sind alle drey Seiten AB. AC. BC.
zu finden jeden der Winkel.

Erstens: Man nehme die Differenz der zwo Seiten, die den zusuchenden Winkel einschließen,

und

und addiere zu ihr die Basin eben desselben Winkels. Die Summe aber halbiere man, so hat man die Halbsumme.

Zweytens: Eben selbe Differenz subtrahiere man von der gemeldeten Basi; und halbiere den Rest, so hat man die Halbdifferenz.

Drittens: Mann addiere zusammen den Logarithmus der Halbsumme + dem Logarithmus der Halbdifferenz + dem doppelten Logarithmus des Radius, und nenne die Summe Z.

Viertens: Man addiere die Logarithmen der zwo Seiten des zusuchenden Winkels, und nenne die Summe X.

Fünftens: X von Z subtrahiert giebt einen Rest, dessen Hälfte der Logarithmus ist der Hälfte des gesuchten Winkels.

VIII. Problem. §. 154.

Wenn gegeben sind die drey Winkel A. B. C. zu finden jede der Seiten.

Die Supplemente der drey Winkel halte man für ihre drey Gegenseiten. Nachmals suche man den Winkel, der der zusuchenden Seite entgegensteht, dieses Winkels Supplement ist die gesuchte Seite.

Anmerkungen zur Analysi im schiefen Triangel. Zu §. 143. Nachdem der Winkel BAD durch die erste Analogie ist gefunden worden, so weiß

weiß man auch den Winkel CAD für die zweyte Analogie: denn

$$\text{im Fall Fig. } \begin{array}{r} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} BAC - BAD \\ BAC + BAD \\ BAD - BAC \end{array} \right\} = CAD.$$

Es ist aber zu merken, daß im Fall Fig. III. anstatt des durch die zweyte Analogie gefundenen Winkels C sein Supplement zu 180° zu nehmen: weil $ACB > 90°$ ist.

Zu §. 144. Nachdem der Winkel BAD durch die erste Analogie entdeckt ist, so giebt sich auch der Winkel CAD für die zweyte Analogie auf erst gemeldte Art.

Zu §. 145. Aus dem in der ersten Analogie gefundenen Winkel giebt sich der Winkel BAC für die zweyte Analogie: denn

$$\text{im Fall Fig. } \begin{array}{r} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} CAD + BAD \\ CAD - BAD \\ BAD - CAD \end{array} \right\} = BAC.$$

Zu §. 146. Aus den gefundenen Theilen BD, CD ist

$$\text{im Fall Fig. } \begin{array}{r} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} BD + DC \\ CD - BD \\ BD - CD \end{array} \right\} = BC.$$

Zu §. 147. Aus den gefundenen Winkeln BAD, CAD wird

im

im Fall Fig. I. $\left.\begin{cases} BAD + CAD \\ CAD - BAD \\ BAD - CAD \end{cases}\right\} = BAC.$
II.
III.

*) Weil in diesem Problem die Art des zusuchenden Winkels muß bekannt seyn, so merke man, daß nach gezogenem Perpendikelbogen die Zweifelhaftigkeit alsogleich könne entschieden werden: denn im Triangel ADB hebt die Hypothenuse AB den Zweifel auf aus §. 84. Denn ist AB $<$ 90°, so sind die Winkel BAD und B von gleicher Art, ist aber AB $>$ 90°, so sind die Winkel BAD, und B von verschiedener Art. So höret auch der Zweifel auf, wenn AC bekannt ist, denn AC ist im Triangel ADC die Hypothenuse. §. 84.

Zu §. 148. Aus den gefundenen Bögen BD und CD giebt sich

im Fall Fig. I. $\left.\begin{cases} BD + CD \\ CD - BD \\ BD - CD \end{cases}\right\} = BC.$
II.
III.

*) Auch in diesem Problem muß die Art der zusuchenden Seite BC, oder aber der Seite AC bekannt seyn. Für die Bögen BD hebt sich der Zweifel gleich durch die Hypothenuse im Triangel ADB mittels der ersten Analogie.

Zu §. 149. Aus dem gefundenen Bogen BD ist für die zweyte Analogie

im

im Fall

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Fig. I.} & BC - BD \\ \text{II.} & BC + BD \\ \text{III.} & BD - BC\end{array}\right\} = CD.$$

Für den dritten Fall ist anstatt des durch die zweyte Analogie gefundenen Winkels C sein Supplement zu nehmen, weil $ACB > 90^\circ$ ist.

Zu §. 150. Nach gefundenem Bogen BD, bestimmt sich CD, wie itzt zu §. 149. ist gemeldet worden.

Beyspiele zur Uebung,

die schiefen Triangel nach den Fällen in jedem der IV. ersten Problemen Fig. I. II. III. aufzulösen.

Fig. I.	
Seiten.	**Winkel.**
ab = 84°.36′	b = 77°.30′
ac = 76°.44′	c = 86°.59′
ad = 76°.24′	d = 90°. 0′
bc = 79°. 0′	bac = 70°.16′
bd = 66°.24′	bad = 66°.79′
cd = 12°.36′	cad = 13°.17′

Fig. II.		Fig. III.	
Seiten.	Winkel.	Seiten.	Winkel.
ab = 84°.36′	c = 77°. 5′	ab = 86°.50′	b = 76°.49′
ac = 86°.54′	d = 90°. 0′	ac = 84°.36′	d = 90°. 0′
ad = 76°.44′	abc = 102°.30′	ad = 76°.24′	acb = 102°.30′
bc = 10°. 0′	abd = 77°.30′	bc = 10°. 0′	acd = 77°.30′
bd = 66°.24′	bac = 9°.46′	bd = 76°.24′	bac = 9°.50′
cd = 76°.24′	bad = 66°.59′	cd = 66°.24′	bad = 76°.49′
	cad = 76°.45′		cad = 66°.59′

§. 155. **Allgemeine Anmerkung.** Es ist schon oben bemerkt worden, daß alle Problemen der sphärischen Trigonometrie an solchen Triangeln gelten,

ten, deren Theile (wenigstens, nachdem der Perpendikelbogen ist gezogen worden) weniger, als 90° haben.

Weil es aber auch schiefe Triangel verschiedener Gattungen giebt, deren mehrere oder gar alle Theile über 90° haben, so ist da anzumerken, was oben §. 139. von geraden Triangeln ist gesagt worden, nämlich, daß in diesen Fällen ein anderer angränzender muß substituirt, und durch die gleichen Theile, oder durch die Supplementen dieses substituirten der vorgegebene Triangel nach seinen Theilen bestimmt werden.

§. 156. Diese Sache läßt sich zum leichtesten erklären, wenn man die 6. 7. 8. Figuren durch ein Chartenpapier entwirft; weil so vor Augen liegt, sowohl wie viele Gattungen schiefer Triangel es geben kan, als auch wie sie untereinander und größere mit kleinern verbunden sind, auch wechselweise einige gleiche Theile, und die übrigen die Supplemente ausmachen, sieh §.

Auf solche Weise können Fig. 6. die Triangel FDB, ADF, BDE durch den Triangel ADE aufgelöset werden, an welchem alle drey Seiten, und alle drey schiefe Winkel $< 90°$ haben.

Die 7te Figur ist von der 6ten darinnen unterschieden, daß in der 6ten der Winkel ADE spitzig, und die Bögen $AE = FB$ jeder $< 90°$ sind, da in der 7ten Figur der Winkel ADE stumpf, auch die Bögen $AE = FB > 90°$ sind. Substituirt

man nun in dieser Figur entweder einen angränzenden, oder einen entgegenstehenden Triangel für einen andern, je wie nach Erfoderung der Fälle der Perpendikelbogen bald aus D auf AE, bald aus A auf DF: bald aus E auf DB auftreffen kann, um zur Auflösung kleinere Triangel zu überkommen, so wird man sie alle auflösen können.

Dieses läßt sich auch an der 8ten Figur wahrnehmen, wo auch AE und DE $> 90°$ sind: denn hingegen sind im Triangel ADF alle Theile (bis auf den Winkel DAF) $< 90°$. Substituirt man diesen anstatt der drey andern, und zieht nach Erfoderung des Falls den Perpendikelbogen bald aus D auf AE, bald aus A auf DF; bald aus F auf den über A verlängerten Bogen DA, so wird man wiederum alle auflösen können.

§. 157. Damit man alle Gattungen schiefer Triangel, woran keine Seite 90° ist, wie in Figura 5. auf einmal vor Augen sehen, und nach diesen die gemeldeten Abbildungen leichter machen möge, um auch bey erfoderlicher Substitution der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, so will ich da in einer Tabell diese Sache entwerfen, so wie es §. 140. von den geraden Triangeln geschehen ist.

§. 158. Hier stehen abermal die Winkel unter ihren Gegenseiten. Die Fracturbuchstaben bedeuten die Art $> 90°$, und die kleinen die Art $< 90°$. L eine Seite $> 90°$, l eine Seite $< 90°$. O einen stumpfen, und a einen spitzigen Winkel. Fig. 6.

…ms aus §. 153.
…°.4′. AC = 30°.) jeden Winkel

A AC …		Für den Winkel B zwischen AB > BC dessen Basis AC.		
…B	42. 8	Latus	AC	42. 8
…C	30. 0	— Latus	— BC	24. 4
	12. 8	= Resid.	= R	18. 4
…C	24. 4	+ Basis	+ AC	30. 0
	36.12	= Summa	= S	48. 4
	18. 6	Semisumm.	½ S	24. 2
…C	24. 4	Basis	AC	30. 0
	12. 8	— Resid.	— R	18. 4
	11.56	= Differ.	= D	11.56
	5.58	Semidiffer.	½ D	5.58

…garit.		Logarit.
…0277 +	Semisumm.	9.60988 +
…1882 +	Semidiffer.	9.01682 +
…0000 +	2 Radii	20.00000 +
…0959 =	Log. Z	38.62670 =
…2663 +	Lat. AB	9.82663 +
…9897 +	Lat. BC	9.61044 +
…2560 =	Logar. X	19.43707 =
…0959	Log. Z	38.62670
…2560 —	— Log. X	19.43707 —
…8399 =	= Ref. Log.	19.18963
…9199	Dimidium	9.59481
…8°. 5′.	= Dimid. B	23°.10′.
…6°.10′.	totum B	= 46°.20′.

Bey=

Beyspiel des VIII. Problems §. 154. aus drey Winkeln (A = 88°.43′. B = 68°.18′. C = 56°.2′.) jede Seite zu finden.

Wie die Operation zu ordnen, zeigt sich auf der folgenden Seite, als worinnen die Winkel eines umschriebenen Triangels die Supplemente sind der Gegenseiten im vorgelegten Triangel. Um dann ohne Verwirrung zu handeln:

So umschreibe man Fig. 29. erstens um den gegebenen Triangel ABC einen andern EFG.

Zweytens, nachmals suche man die Supplemente der gegebenen Winkel A. B. C. auf diese Weise:

Data		Supplementa
A = 88°.43′	subtrahirt von 180	= 91°.17′. = EF.
B = 68°.18′		= 111°.42′. = EG.
C = 56°. 2′		= 123°.58′. = FG.

Drittens, diese Supplemente schreibe man zu den Seiten des umschriebenen Triangels EFG, welche den gegebenen Winkeln A. B. C. gegenüber liegen.

Viertens, ietzt suche man jenen Winkel aus EFG, der der im Triangel ABC zusuchenden Seite gegenüberliegt.

Fünftens, und nehme des jetzt gefundenen Winkels (E oder F oder G) Supplement.

Sechstens, dieses Supplement wird das Maaß seyn der im Triangel A B C gegenüberliegenden Seite AB oder AC oder BC auf diese Art:

Gesuchte Winkel		Supplement =
G = 107°. 18′	subtrahirt von 180	= 72°. 42′. = BC.
E = 127°. 37′		= 52°. 23′. = AB.
F = 117°. 28′		= 62°. 32′. = AC.

Man

AB		Man sucht AC		
Binkel E G > FE FG		Durch den Winkel F zwischen FG > EF dessen Basis EG		
EG	111.42	— Seite	FG	123.58
— FE	91.17	Seite	— EF	91.17
— R	20.25	= Rest	= R	32.41
+ FG	123.58	+ Basis	+ EG	111.42
= S	144.23	= Summe	= S	144.23
½ S	72.11	Halbsumme	½ S	72.11
FG	123.58	Basis	EG	111.42
— R	20.25	— Rest	— R	32.41
= D	103.33	= Differ.	= D	79. 1
D	51.46	Halbdiffer.	½ D	39.30
Logarit			Logarit	

Man

Drittes Hauptstück.

Von Auflösung der Quadrantaltriangel.

§. 161.

Quadrantaltriangel heißen, woran wenigstens eine Seite ein Quadrant $= 90^\circ$ ist.

§. 162. Es sind ihrer drey Gattungen. Die erste ist, wo alle drey Seiten Quadranten sind, auch alle drey Winkel 90° haben, diese brauchen keine Auflösung. Man erkennt aber diese Gattung, wenn drey Theile jeder 90° gegeben sind, wenn nur nicht zween dieser Theile einander entgegenliegen.

§. 163. Die zweyte Gattung ist, wo zwey Seiten Quadranten sind, deren Gegenwinkel auch jeder 90° hat; bey welchen sodenn der zwischen den Quadranten liegende Winkel kleiner und größer als 90° seyn kann, und wie dieser Winkel ist, so ist auch seine Gegenseite; denn diese Seite ist eben das Maaß des Winkels, weil am Vertex dieses Winkels zwischen zweenen Quadranten der Pol jener Seite ist.

*) Ist demnach in dieser Gattung der Zwischenwinkel der Quadranten, oder der Zwischenbogen bekannt, so weiß man alle Theile. Ist aber keiner aus diesen zweenen Theilen bekannt, so kann man auch keinen bestimmen.

§. 164. Die dritte Gattung Quadrantaltriangeln ist, woran ein einziger Bogen ein Quadrant ist, welcher Triangel nothwendig schiefwinklicht ist.

*) Wenn in dieser Gattung nebst dem Quadranten zween andere Theile bekannt sind, so kann man die drey übrigen Theile mittels der Problemen von den geradwinklichten Triangeln durch Substitution eines andern Triangels ausfindig machen. Denn es sey z. B. in Fig. 17. vorgelegt der schiefe Triangel ABD, in welchem AB ein Quadrant, und die Seite DA nebst dem Winkel A bekannt seyn, und die Seite DB soll gesucht werden.

Man verlängere die Seite AD bis E so, daß daß AE auch ein Quadrant werde, und ziehe aus A als dem Pol den Bogen EB. Auf diese Weise entsteht ein neuer Triangel DEB, woran der Winkel DEB gerad ist. Die Seite DE wird das Complement der Seite AD, und die Seite EB ist gleich dem Winkel A; weil der Bogen BE aus A als dem Pol ist beschrieben worden, und demnach das Maaß des Winkels EAB ist. :

Nun denn sind im geraden Triangel DEB bekannt die Seiten DE und EB; suchet man demnach die Hypothenuse BD aus §. 131. so hat man auch die gesuchte Seite BD für den Triangel ADB.

§. 165. Was es immer für Theile sind, wenn man nur zween weißt im Quadrantaltriangel, so

weißt

weißt man jedesmal auch zween im geraden Triangel DEB Fig. 17.; wenn jene schon auch größer als 90° wären: denn wenn im schiefen Quadrantaltriangel FDB nebst dem Quadranten BF bekannt wäre der schiefe Winkel FBD; so darf man davon nur 90° abziehen, um den Winkel EBD zu überkommen: Wäre überdas bekannt die Seite DF > 90°, so bleibt mit Abzug des Quadranten EF von DF, der kleinere Bogen ED übrig.

Und nun sind im geraden Triangel BED bekannt der Winkel EBD, und die Seite DE, nebst dem geraden Winkel bey E. Hiemit kann man finden die Seite BE §. , welche gleich ist dem Winkel F: oder man kann finden die Hypothenuse DB. §. , welche auch eine Seite des Quadrantaltriangels FDB ist, und so von andern Fällen.

125 127

Viertes Hauptstück.

Von dem Gebrauch der sphärischen Trigonometrie.

Bisher ist von den sphärischen Triangeln überhaupt und abstract gehandelt worden. Folgende Beyspiele sollen von ihrer Anwendung und Brauch handeln, welcher in der Geographie, in der Gnomonik, und in der Astronomie gleichsam ins Unendliche geht.

§. 166. I. Aufgab. Es sey gegeben die Schiefe der Ecliptic = 23°. 28′: der Ort der ☉ in der Ecliptic = 30°. und man solle bestimmen die Declination der Sonne.

Es sey Fig. 35. der Aequator = ÆOAQ. die Ecliptic = EBAC. der Aequinoctialpunct = A. der Ort der Sonne von A = AB. der Declinationszirkel = PBOI, welcher den Aequator in O rechtwinklicht durchschneidet: wodurch der geradwinklichte Triangel BOA entsteht, in welchem gegeben ist die Hypothenuse = dem Abstand der ☉ vom O; der Winkel BAO = der Schiefe der Ecliptic: und es ist zu suchen die Seite BO, oder die Declination der ☉.

Betrachtet man die Umstände der gegebenen und des zusuchenden Theiles; so erscheinet, daß gegeben ist die Hypothenuse, und ein Winkel, und daß gesucht wird die dem gegebenen Winkel entgegenstehende Seite, welches also der Fall ist des §. 119. So heißt es dann:

R : ſAB = ſA : ſBO. das ist,
R : 30° = 23. 28:

Sinus totus ist	— 10
zum Sin. des Orts der ☉	+ 9.69897
Wie Sin. der Schiefe der Ecliptic	+ 9.60012
zum Sin. der Declination der ☉	
= 11°. 29′	= 9.29908

§. 167.

§. 167. II. Aufgab. Gegeben seyn die Theile, wie im §. 166. man solle finden die gerade Ascension der ☉, das ist, in dem geraden Triangel A O B Fig. 35. den Bogen A O. Denn

*) Die gerade Ascension heißt derjenige Punct des Aequators, der in Sphæra recta mit einem gewissen Punct der Ecliptic zugleich aufgeht. Da nun der Zirkel P B O I durch die Pole P. I. der Welt durchgeht, welche Pole in Sphæra recta auf dem Horizon aufliegen, so ist der Zirkel P B O I in dieser Sphæra recta auch ein Horizon, an welchem der Punct O des Aequators zugleich mit dem Punct B der Ecliptic aufgeht.

Vergleichet man demnach die gegebenen mit dem zusuchenden Theile A O, so ersieht man, daß die Aufgabe zu §. 120. gehört. Dahero ist

$sc\ A : R = tc\ AB : tc\ AO$. das heißt
$23^\circ.28' : R = 30^\circ :$

Sin. Compl. der Schiefe der Ecliptic	— 9.96251
ist zum Sinus totus	+ 10.
Wie Tang. Compl. der Länge der ☉	+ 10.23856
zum Tang. Compl. der geraden	= 10.27605
Ascension	= 27°.54'.

§. 168. III. Aufgab. Gegeben seyn die Theile, wie §. 166. Man solle finden den Winkel des Meridians

ridians mit der Ecliptic; das ist, im geraden Triangel AOB Fig. 35. den Winkel ABO: denn

*) Der Stundenzirkel PBOI, der durch die Pole der Welt P. I. durchstreicht, ist irgendswo ein Meridian.

Vergleicht man die gegebenen mit dem zusuchenden Theile, so ersieht man daraus den Fall §. 121. Demnach ist

R : sc AB = t A : tc B. das heißt:
30° = 23°. 28

Sinus totus ist	— 10.
zum Sin. Compl. der Länge der ⊙	+ 9.93753
Wie Tang. der Schiefe der Ecliptic	+ 9.63761
zum Tang. Compl. des Winkels des	= 9.57514
Meridians mit der Ecliptic = 69°. 24′	

§. 169. IV. Aufgab. Gegeben seyn Fig. 35. die Schiefe der Ecliptic = 23°. 28′. = A. und die Declination der ⊙ = 11°. 29′. = BO. Man suchet die gerade Ascension der ⊙ = AO.

Die Bedingnissen der Aufgabe treffen auf den Fall §. 122. Folglich ist:

t. A : R = t BO : ſ AO. das heißt

Tangens der Schiefe der Ecliptic ist	— 9.63761
zum Sinus totus	+ 10.
Wie Tang. der Declination der ⊙	+ 9.30781
zum Sinus der geraden Ascension	= 9.67020
	= 27°. 54′

§. 170.

§. 170. V. Aufgab. Gegeben seyn Fig. 35. die Theile wie im §. 169. Man suchet den Winkel der Ecliptic mit dem Meridian = B.

Diese Bedingnissen stimmen ein mit dem Fall §. 123. Deßwegen ist

sc B O : sc A = R : s B. das heißt:

Sin. Compl. der Declination ist	—	9.99121
zum Sin. Compl. der Schiefe der Eclip.	+	9.96250
Wie Sinus totus	+	10.
zum Sinus des Winkels der Ecliptic mit dem Meridian = 69°.24′.	=	9.97129

§. 171. VI. Aufgab. Gegeben seyn Fig. 35. die Theile, wie §. 169. Man suchet die Länge der ⊙ = A B; das heißt ihren Ort in der Ecliptic.

Die Theile der Aufgab haben die Bedingnissen des §. 124. Demnach ist

s A : s B O = R : s A B. das heißt:

Sinus der Schiefe der Ecliptic ist	—	9.60012
zum Sinus der Declination	+	9.29909
Wie Sinus totus	+	10
zum Sinus der Länge der ⊙ = 30°.0	=	9.69897

§. 172. VII. Aufgab. Gegeben seyn Fig. 35. die Schiefe der Ecliptic = A. 23°. 28′. und die gerade Ascension = A O. 27°. 54′. Man suchet den Winkel der Ecliptic mit dem Meridian = B.

Diese

Diese Theile hangen zusammen, wie im §. 125. Folglich ist R : sc AO = ſ A : sc B. das heißt:

Sinus totus ist	— 10.
zum Sin. Compl. der geraden Ascension	+ 9.94633
Wie Sinus der Schiefe der Ecliptic	+ 9.60012
zum Sinus Complem. des Winkels	= 9.54645
der Ecliptic mit dem Meridian	= 68°.24′

§. 173. VIII. Aufgab. Gegeben seyn die Theile, wie §. 172. Man suchet die Declination der Sonne = BO. Fig. 35.

Die Lage der vorkommenden Theile ist, wie §. 126. So ist dann:

R : ſ AO = t A : t BO. das heißt:

Sinus totus ist	— 10
zum Sinus der geraden Ascension	+ 9.67018
Wie Tangens der Schiefe der Ecliptic	+ 9.63761
zum Tangens der Declination	+ 9.30779
	= 11°.29′.

§. 174. IX. Aufgab. Gegeben seyn Fig. 35. die Theile, wie §. 172. Man suchet die Länge der ⊙ = AB.

Diese Theile haben die Lage wie im §. 127. Solchemnach ist:

R : sc A = ct AO : ct AB. das heißt:

Sinus

Sinus totus ist	— 10
zum Sin. Compl. der Schiefe der Eclipt.	+ 9.96251
Wie Tang. Compl. der geraden Ascens.	+ 10.27615
zum Tang. Compl. der Länge der ☉	= 10.23866
	= 30°. 0

§. 175. X. Aufgab. Es seyn gegeben Fig. 35. die Länge der ☉ = A B. 30°. die gerade Ascension = A O. 27°. 54′. Man sucht die Schiefe der Ecliptic = A.

Die Lage dieser Theile ist wie im §. 128. und so ist: R : *ct* A B = *t* A O : *cs* A. das heißt:

Sinus totus ist	— 10
zum Tang. Compl. der Länge der ☉	+ 10.23856
Wie Tang. der geraden Ascension	+ 9.72384
zum Sin. Compl. der Schiefe der Eclipt.	= 9.96240
	= 23°. 28′.

§. 176. XI. Aufgab. Gegeben seyn Fig. 35. die Theile, wie §. 175. Man suchet den Winkel der Ecliptic mit dem Meridian = B.

Die Lage dieser Theile stimmt zu mit §. 129. Derohalben ist *s* A B : R = *ſ* A O : *ſ* B. das heißt:

Sinus der Länge der ☉ ist	— 9.69897
zum Sinus totus	+ 10.
Wie Sinus der geraden Ascension	+ 9.67018
zum Sinus des Winkels der Ecliptic mit dem Meridian	= 9.97121
	= 69°. 24′.

§. 177.

§. 177. XII. Aufgab. Gegeben seyn Fig. 35. die Theile, wie §. 175. Man suchet die Declination der ☉ = BO.

Die Lage dieser Theile trifft ein mit §. 130. Deßwegen ist:

cs AO : *sc* AB = R : *cs* BO. das heißt:

Sin. Compl. der geraden Ascension	— 9.94634
zum Sin. Compl. der Länge der ☉	+ 9.93753
Wie Sinus totus	+ 10.
zum Sin. Compl. der Declination	= 9.99119
	= 11°. 29′.

§. 178. XIII. Aufgab. Es seyen gegeben Fig. 35. die gerade Ascension = AO. 27°. 54′. und die Declination = BO. 11°. 29′. Man suchet die Länge der ☉ = AB.

Die Lage dieser Theile ist wie im §. 131. und ist also: R : *sc* AO = *sc* BO : *s* AB. das heißt:

Sinus totus ist	— 10.
zum Sin. Compl. der geraden Ascens.	+ 9.94633
Wie Sin. Compl. der Declination	+ 9.99122
zum Sin. Compl. der Länge der ☉	= 9.93755
	= 30°. 0

§. 179. XIV. Aufgab. Gegeben seyn die Theile, wie §. 178. Man suchet die Schiefe der Ecliptic = A. Fig. 35.

Die

Die Lage dieser Theile trifft ein mit §. 132. und ist demnach:

s A O : R = t B O : t A. das heißt:

Sinus der geraden Ascension ist	— 9.67018
zum Sinus totus	+ 10.
Wie Tangens der Declination	+ 9.30781
zum Tangens der Schiefe der Ecliptic	= 9.63773
	= 23°. 28′

§. 180. XV. Aufgab. Gegeben seyn die Theile, wie §. 178. Man suchet den Winkel der Ecliptic mit dem Meridian. Fig. 35.

Die Lage dieser Theile stimmet ein mit §. 132. dem Zufolg ist:

ſ B O : R = t A O : t B. das heißt:

Sinus der Declination ist	— 9.29903
zum Sinus totus	+ 10.
Wie Tangens der geraden Ascension	+ 9.72384
zum Tangens des Winkels der Ecliptic mit dem Meridian.	= 10.42481

§. 181. XVI. Aufgab. Wenn gegeben sind Fig. 35. die Schiefe der Ecliptic = A. 23°. 28′. und der Winkel der Ecliptic mit dem Meridian = B. 69°. 24′. Man suchet die Länge der ☉ = A B.

Die Lage dieser Theile trifft übereins mit §. 133. Demnach ist:

$tA : R = tcB : tc\,AB$. das heißt:

Tangens der Schiefe der Ecliptic ist	— 9.63761
zum Sinus totus	+ 10.
Wie Tang. Complem. des Winkels der Ecliptic mit dem Meridian	+ 9.57504
zum Sin. Compl. der Länge der ☉	= 9.93743
	= 30°. 0

§. 182. XVII. Aufgab. Gegeben seyn die Theile, wie §. 181. Man suchet aber die Declination der ☉ = BO. Fig. 35.

Die Lage dieser Theile kömmt übereins mit §. 134. Folglich ist:

$sB : scA = R : sc\,BO$. das heißt:

Sinus des Winkels zwischen der Ecliptic und Meridian ist	= 9.97130
zum Sin. Compl. der Schiefe der Eclipt.	+ 9.96250
Wie Sinus totus	+ 10.
zum Sin. Compl. der Declination	= 9.99120
	= 11°. 29′

§. 183. XVIII. Aufgab. Gegeben seyn die Theile, wie §. 181. Man suchet aber die gerade Ascension = AO.

Die Lage dieser Theile ist, wie §. 134. Demnach ist $sA : scB = R : sc\,AO$. das heißt:

Sinus

Sinus der Schiefe der Ecliptic ist — 9.60012
zum Sin. Complem. des Winkels der
Ecliptic mit dem Meridian + 9.54634
Wie Sinus totus + 10.
zum Sin. Compl. der Declination der ☉ = 9 94622

*) In den bißherigen Aufgaben von §. 166. kann man die Analysin eines geraden Triangels mit allen seinen Fällen wahrnehmen, und üben. Es wird aber nicht überflüßig seyn, wenn wir noch andere Aufgaben, ohne eine Ordnung nach der Analysi zu beobachten, beysetzen.

§. 184. XIX. Aufgab. Es sey gegeben die Declination der ☉, und die Polhöhe eines Orts. Man soll finden, wie weit vom Punct des wahren Aufgangs, oder vom Punct Ost am Horizon die ☉ aufgeht.

In Fig. 36. sey hn der Horizon: ÆQ der Aequator: P und I die Weltpole: nP die Polhöhe. Die ☉ supponiere man im Punct A des Horizons. So ziehe man den Stundzirkel PAOI, welcher zugleich ein Declinationszirkel ist; der in O den Aequator geradwinklicht durchkreuzt. Der Punct B (wo die ☉ aufgeht, wenn sie im Aequator ist) heißt Ost oder der wahre Aufgang. Demnach soll in der Aufgabe die Weite des Puncts A von B (man heißt sie amplitudinem ortivam) auf dem Horizon bestimmt werden. Nun hat man den ge-

raden Triangel B O A, woran gegeben der gerade Winkel O: die Declination der ☉ = O A; und und der Winkel B, weil er gleich ist seinem Maaß Q n, das ist, dem Complement der Polhöhe n P. woraus zu finden ist die Weite A B.

Wenn man die Bedingnissen der Aufgabe, das ist, die Lage der gegebenen und des zusuchenden Theiles betrachtet, und gegeneinander vergleichet, so erkennet man, daß der gegebene Winkel B der gegebenen Seite O A gegenüberliegt, und daß die zusuchende Weite B A die Hypothenuse des Triangels ist. Demnach hat man den Fall §. 124. und wird:

Wie Sinus B (des Complements der Polhöhe n P)
zum Sinus der Declination der ☉ = A O:
So Sinus totus
zum Sinus der Aufgangsweite A B.

§. 185. XX. Aufgab. Es sey Fig. 36. gegeben die Declination und die Polhöhe, daraus soll man finden die Aufgangsdifferenz. *

*) Differentia ascensionalis ist ein Bogen des Aequators, zwischen zweenen seinen Puncten, deren der erste mit einem gewissen Puncte der Ecliptic in Sphæra recta, und der andere mit eben diesem Puncte der Ecliptic in Sphæra obliqua zugleich mit aufgeht: z. B. Wenn der Zirkel P O I in Sphæra recta ein Horizon ist, so ist der Punct O des Aequators

tors die Ascensio recta des Punctes A, den man supponiren muß, daß er zur Ecliptic gehört. Nun aber in Sphæra obliqua geht mit diesem Puncte A der Ecliptic zugleich am Horizon hAn auf der Punct B des Aequators BOQ. Demnach ist der Bogen OB des Aequators die Aufgangsdifferenz, welche da zu suchen ist.

Nun so ist im Triangel AOB Fig. 36. gegeben der Winkel B = dem Complement der Polhöhe, und die Seite OA = der Declination der ☉, und man sucht die Seite BO, so am gegebenen Winkel angränzt. Dieses ist also der Fall §. 122. und heißt dann:

Wie Tangens B (des Complements der Polhöhe nP)
zum Tangens der Declination OA:
So Sinus totus
zum Sinus der Ascensionaldifferenz BO.

§. 186. XXI. Aufgab. Wenn gegeben ist die Declination der ☉; die Polhöhe; und die Stund des Tages: wie ist die Höhe der ☉ über den Horizon zu finden?

Es seyn Fig. 37. die Weltpole P und I. der Horizon = hn: der Aequator = ÆQ. und

Erstens, die ☉ sey in G des Aequators, wo sie keine Declination hat: es sey aber bekannt die Stund des Tages, und hiemit die Entfernung der ☉

vom Mittagzirkel = GÆ des Aequators = dem Winkel GPÆ. Zieht man durch die ⊙, das ist, durch G den Verticalzirkel LGO, so entsteht der gerade Triangel GOB; weil die Verticalzirkel auf dem Horizon gerad aufstehen.

Nun ist im Triangel GOB bekannt der Winkel B = hÆ, welches gleich ist Qn oder dem Complement der Polhöhe nP. Auch ist bekannt die Hypothenuse BG, als das Complement des Aequatorsbogen GÆ = GPÆ. Und ist zu suchen die Seite OG, als die begehrte Höhe der Sonne, das heißt, es ist gegeben die Hypothenuse und ein Winkel, dessen Gegenseite zu finden. Dieser Fall ist im §. 119. demnach:

Wie Sinus totus
zum Sinus GB (des Complements der Sonnenferne vom Meridian GÆ)
Also Sinus B (des Complements der Polhöhe)
zum Sinus GO, der Sonnenhöhe.

Zweytens, ist die ⊙ (Fig. 38.) außer dem Aequator in C, und gegeben die Declination = GC, und die Stund vom Meridian = GÆ = dem Winkel GBÆ zwischen dem Stundzirkel BGI und dem Meridian BÆI: und ist zu suchen die Sonnenhöhe OC im Verticalzirkel ACL, so entsteht ein schiefer Triangel ABC, in welchem bekannt ist erstens die Seite AB = dem Complement der Polhöhe

höhe nB, zweytens die Seite BC = dem Complement der Declination GC, und drittens der Winkel ABC = ÆG = ÆBG. Suchet man nun die Seite AC; so ist ihr Complement CO die gesuchte Höhe der ☉ über den Horizon hOn.

Betrachtet man die Lage der bekannten Theile, nach §. 142. so erkennt man, daß der Perpendikelbogen AD aus A oder dem Zenith auf die gegenüberstehende Seite BC muß gezogen werden, und daß dieser Fall aus §. 150. aufzulösen ist. Es ist demnach erstens:

Wie Sinus totus
zum Sinus Complementi B (des Abstandes der ☉ vom Meridian)
Also Tangens AB (des Complements der Polhöhe)
zum Tangens des Segments BD.

Zweytens, ziehet man BD ab von BC*, so bleibt das Segment CD übrig.

*) Wäre die ☉ in einem Stundzirkel vor 6 Uhr früh oder nach 6 Uhr Abends, so müßte der Bogen BD zum Bogen BC addiret werden, um den Bogen CD zu überkommen, weil der Perpendikelbogen AD über den Triangel hinausfiele.

Drittens, nun fahre man im §. 150. fort, und sage:

Wie

Wie Sinus Complementi des Bogen BD
zum Sinus Complementi des Bogen CD:
Also Sinus Complementi des Bogen AB
zum Sinus Complementi des Bogen AC.

Das heißt im gegenwärtigen Falle:

Wie Sinus Complementi des Bogen BD
zum Sinus Complementi des Bogen CD:
Also Sinus der Polhöhe
zum Sinus der Höhe der ☉.

*) Sieh unten §. 194.

Anmerkung. Durch diese Aufgabe werden die Tafeln der Sonnenhöhen zu jeder Stund, und in jedem Zeichen des Thierkreises in der Gnomonik berechnet.

§. 187. XXII. Aufgab. Wenn (Fig. 38.) gegeben das Azimuth der ☉ = dem Winkel OAn = CAB; die Entfernung der ☉ vom Meridian = GÆ = GBÆ; und die Declination der ☉ = GC. Wie ist ihre Höhe über dem Horizon zu finden, wovon nämlich CA das Complement ist.

Weil da der gegebene und der zusuchende Theil einander gegenüberliegen, so ist das der Fall §. 112. Derohalben ist:

Wie Sinus des Winkels CAB (des Azimuth)
zum Sinus des Bogen CB (des Complements der Declination):

Also

Also Sinus des Winkels CBA (des Abstandes der ⊙ vom Meridian, oder der gegebenen Stund nach Graden)
zum Sinus des Bogen AC (des Complements der Höhe der ⊙.)

§. 188. XXIII. Aufgab. Wenn gegeben ist (Fig. 38.) die Declination und Höhe der ⊙, nebst dem Azimuth. Wie findet man die übereinstimmende Zeit?

Aus dieser Aufgabe ist im nämlichen Triangel ABC bekannt CB = dem Complement der Declination: CA = dem Complement der Höhe, und CAB = dem Azimuth, und ist zu suchen der Winkel ABC = GÆ dem Abstand der ⊙ vom Meridian.

Die Theile stehen auch da einander gegenüber, so ist dann dieses der Fall §. 112. und heißt:

Wie Sinus CB (des Complements der Declination)
zum Sinus CAB (des Azimuths):
Also Sinus CA (des Complements der Höhe)
zum Sinus ABC (des Abstands der ⊙ vom Meridian in Graden).

§. 189. XXIV. Aufgab. Wenn gegeben ist (Fig. 38.) die Polhöhe, die Declination, und die Höhe der ⊙. Wie ist die Stunde zu finden?

Im Triangel ABC ist bekannt AB als das Complement der Polhöhe; BC als das Complement der Declination, und AC als das Complement der Höhe der ⊙. Folglich sind bekannt alle drey Seiten, und ist zu suchen der Winkel B nach §. 153. Wozu das Beyspiel dienet pag. 116. II. Tabelle.

§. 190. XXV. Aufgab. Wenn gegeben ist (Fig. 38.) die Polhöhe, die Declination, und die Höhe der ⊙. Wie ist das Azimuth zu finden?

Im Triangel ABC sind wiederum alle drey Seiten bekannt, wie §. 189. Hier ist aber zu suchen der Winkel A nach §. 153. Sieh abermal das Beyspiel pag. 116. II. Tabelle.

§. 191. XXVI. Aufgab. Wenn gegeben ist die Polhöhe, und die Stund, das ist, der Abstand der ⊙ vom Meridian in Graden des Aequators: wie ist zu finden der Bogen am Horizon, der zwischen dem Meridian und durchkreuzenden Stundzirkel enthalten ist?

Es sey (Fig. 39.) HO der Horizon, ÆQ der Aequator, A und I die Weltpole, ABI ein Stundzirkel, der in B den Horizon durchschneidet; der Meridian sey AOQ. Nun sey die ⊙ irgendwo in dem Stundzirkel. Jetzt fragt man um den Bogen BO am Horizon.

Der Triangel AOB ist rechtwinklicht bey O; denn der Horizon geht durch den Meridian geradwinklicht: Nachmals ist gegeben AO als die Pol-

höhe,

höhe, und der Winkel OAB, dessen Maaß der Bogen des Aequators CQ ist, welcher Bogen die gegebene Stund in Graden des Aequators ist, indem die ☉ in diesem Stundzirkel ABCI befindlich zu seyn supponirt wird. Da demnach AO und A gegeben sind, und OB gesucht wird, so hat man den Fall §.126. So ist dann:

Sinus totus

zum Sinus der Polhöhe (AO)

Wie Tangens der Stund in Graden des Aequators A

zum Tangens des Bogen der Stund am Horizon BO.

*) Durch diese Analogie kann man die Horizontaluhr für jede Polhöhe der ganzen Welt mit allen Stunden, Halben, Vierteln, Minuten berechnen, wie ich in der Gnomonik gezeiget, welche vor einem Jahr zu Salzburg in Druck erschienen. In eben diesem Werke ist die Theorie und die Praxis aller anderer Gattungen der Sonnenuhren, sie mögen horizontal, vertical, inclinierend, declinierend, oder zugleich inclinierend und declinierend seyn, durch die sphärische Trigonometrie erkläret worden.

§. 192. XXVII. Aufgab. Wenn gegeben ist die Polhöhe, und die Stunde des Tags, auf dem ersten Verticalzirkel den Bogen zu finden, der zwischen dem Meridian und dem Stundzirkel der gegebenen Stund enthalten ist.

Es sey Fig. 40. der Meridian AQIA, der erste Verticalzirkel ZBN, welcher auf dem Meridian gerad aufsteht, und demnach den geraden Winkel AOB machet. A und I seyen die Weltpole, ABI der Stundzirkel, unter dem die ⊙ zu selbiger Stund sich befindet. Diese Stund ist nach Graden des Aequators gleich dem Bogen CÆ, als dem Abstand der ⊙ vom Mittage. Eben diesem Bogen ist gleich der Winkel BAO, weil der Weltpol A auch der Pol des Aequators ist. HA ist die Polhöhe, und demnach AO das Complement der Polhöhe. Was man suchet, ist der Bogen OB zwischen dem Meridianpunct O und dem Punct B am Verticalzirkel ZBN, wo der Stundzirkel ABI durchgeht.

Nun so hat man im geraden Triangel AOB bekannt die Seite AO als das Complement der Polhöhe, und den Winkel OAB, und die gegebene Stund in Graden, und man suchet die Seite OB. Dieser Fall ist wiederum jener §. 126. Demnach:

Wie Sinus totus
zum Sinus (des Complements der Polhöhe AO)
Also Tangens der Stund in Graden des Aequators = A
zum Tangens des Stundbogens am Verticalzirkel = BO.

*) Diese Analogie bestimmt alle Stundenwinwinkel an geraden Verticaluhren.

§. 193. XXVIII. Geographische Aufgab. Wenn die Längen und Breiten zwoer Oerter, z. B. von Paris und Constantinopel bekannt sind, wie zu finden ihr Abstand voneinander.

Es seyen (Fig. 41.) B und I die Weltpole, ÆFQ der Aequator, C Paris, A Constantinopel. Die Länge von Paris sey der Grad E des Aequators, die Breite aber = EC. Die Länge von Constantinopel sey der Grad F des Aequators, die Breite aber = FA. Nun sey zu suchen ihr Abstand, nämlich der Bogen CA.

Da ist der schiefe Triangel ABC mit einem stumpfen Winkel bey C, weil die Breite für Paris größer ist als für Constantinopel, und deßwegen der große Zirkel OCAR, welcher durch beyde Orte durchgeht, an C stumpf anstößt.

Nun ist an diesem Triangel ABC bekannt der Winkel B, dessen Maaß ist der Bogen EF des Aequators als die Differenz der beyden Längen E und F. Wiederum ist bekannt CB, als das Complement der Breite EC: und FA, als das Complement der Breite FA. Da dann gesucht wird der Bogen CA, so gehört die Aufgabe zu §. 150. Will man die Auflösung wirklich vollenden, so merke man, daß die Differenz der Meridianen EF für gemeldete Orte 26°. 33'. beträgt: die Breite aber EC ist 48°. 50'. 10". und die Breite FA ist 41°. 0'. nach Cassini.

§. 194. XXIX. Aufgab. Wenn gegeben ist die größte Declination der ☉, und die Polhöhe eines Ortes, zu finden, um was Zeit die ☉ aufgeht.

Die ☉ geht auf, wenn sie den östlichen Horizon erreicht, und hat ihre größte nördliche Declination (denn von dieser wollen wir da reden) wenn sie im Tropicus Cancri anstößt. So sey nun (Fig. 42.) COH der Horizon, ÆQ der Aequator, P und p die Weltpole, TOR der Wendzirkel des Krebsens, die größte Declination BO. Wenn nun die ☉ im Tropicus lauft, so geht sie auf in O des Horizons: Jetzt möchte man wissen, was immer für ein Stundzirkel ist, welcher zugleich mit der Sonne durch O des Horizons geht, um hierdurch die Zeit des Aufgangs zu erfahren, dieser Stundzirkel ist POBp.

Demnach hat man den Triangel PHO, der geradwinklicht in H ist, weil der Horizon durch den Meridian gerad durchgeht. In diesem Triangel ist bekannt HP = als die Polhöhe, und die Hypothenuse OP als das Complement der Declination BO. Suchet man itzt den Winkel HPO, so weiß man auch den Bogen QB des Aequators, weil er dem Winkel P gleich ist, das ist, man weiß den Abstand des Stundzirkels POBp vom mitternächtigen Meridianbogen HRQ in Graden des Aequators. Verkehret man demnach diese Grade in Theile der Zeit, so geben sie den Namen des Stundzirkels, oder was eines ist,

mit

mit dem wievielten Stund- oder Zeitzirkel die Sonne aufgeht.

Da der zwischen der Hypothenuse und einer Seite liegende Winkel gesucht wird, so ist dieses der Fall §. 128. Demnach ist:

Wie Tangens Complementi (der Polhöhe) HP
zum Tangens* der Declination = OB:
Also Sinus totus
zum Sinus Complementi des Winkels P.

NB. *) Gemäß der Analogie §. 128. sollte da stehen Tangens Complementi: und gemäß der im Triangel PHO gegebenen Theilen sollte eben auch da stehen das Complement der Declination = OP. Solchemnach sollte dieser Satz also lauten: Zum Tangens Complementi des Complements der Declination. Weil denn Complementum Complementi eines Theils am Triangel der Theil selbst ist, deßentshalben ist da auch dieses Complementum Complementi Declinationis ausgelassen, und die Declination selbst gesetzet worden. Dieses kann sich sehr oft ereignen, und ist wohl zu beobachten, um alle Irrung zu vermeiden. Schon oben §. 186. ist dieses an den letzten zweenen Sätzen der letzten Analogie also geschehen.

Ich will dieses Problem noch zum Schluß für einen bestimmten Ort in Ziffern vorlegen: und zwar nach Art, wie ich in der Gnomonik zu handeln pflegte, und Deutlichkeit halber zu thun anrieth.

Es sey die Frag: Zu was Zeit die ☉ im höchsten Sommer zu Salzburg aufgehe. Zu Salzburg wird die Polhöhe 47°. 44′ geschätzet. Die größte Declination der ☉ aber wollen wir 23°. 30′ annehmen, so wird dann die Operation gemäß der vorherigen Analogie also stehen:

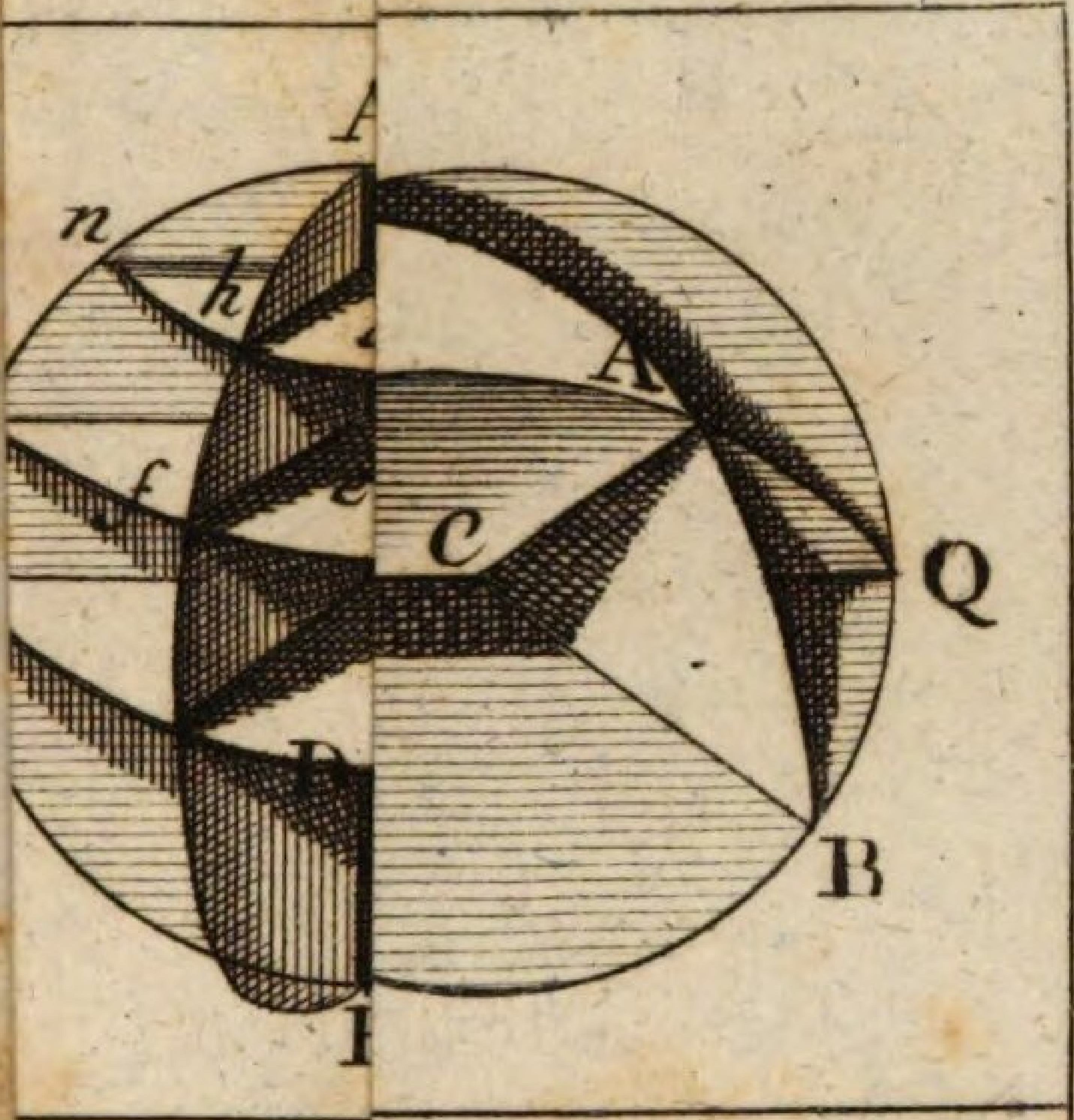
Polhöhe	47°. 44′	. tc .	9.95850 —
Declination	23°. 30′	. t .	19.63830 + R
Winkel P	61°. 25′	. sc .	9.67980 =

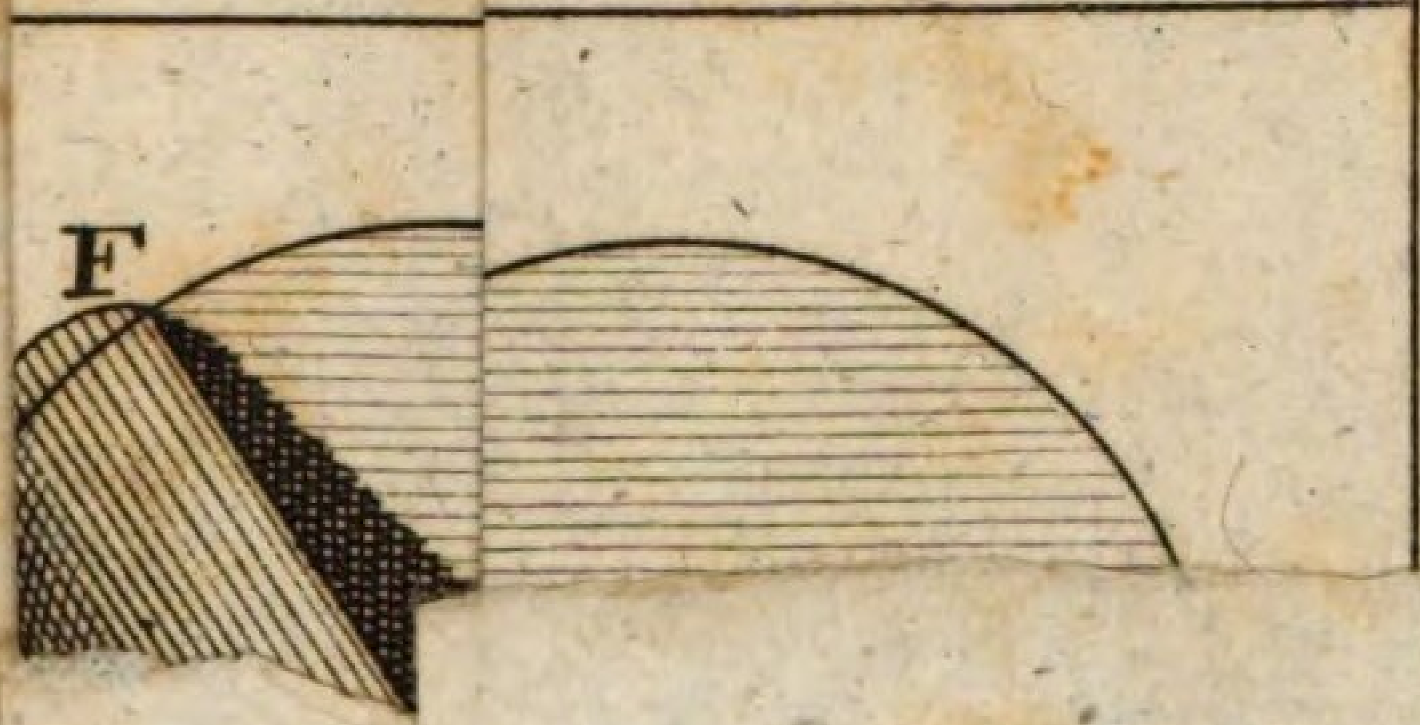
Weil dann P gleich ist dem Bogen B Q des Aequators, so ist der Abstand der aufgehenden Sonne vom mitternächtigen Meridianbogen, das ist, von 12 Uhr Mitternacht gleich 61°. 25′ nach Graden des Aequators, deren 15° eine Stund machen: Verwandelt man demnach 61°. 25′ in Theile der Zeit, so machen sie 4 Stund, 5 Minuten, 40 Secunden, welches die Zeit des Aufgangs der Sonne am längsten Tag des Sommers ist. Diese Verwandlung geschieht durch die Regel Detri, indem man sagt: 15° oder 900′ geben 1 Stund oder 60 Minuten der Zeit: Was geben 61°. 25′ oder 3685′ des Zirkels an der Zeit? Es kommen heraus 245′. $\frac{6}{9}$ der Zeit, das ist, 4 Stund, 5′, 40″ der Zeit; denn 245′ mit 60′ einer Stund dividirt, giebt 4 Stund, 5′ und $\frac{6}{9}$ einer Minute $= \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{40}{60} =$ 40 Secunden.

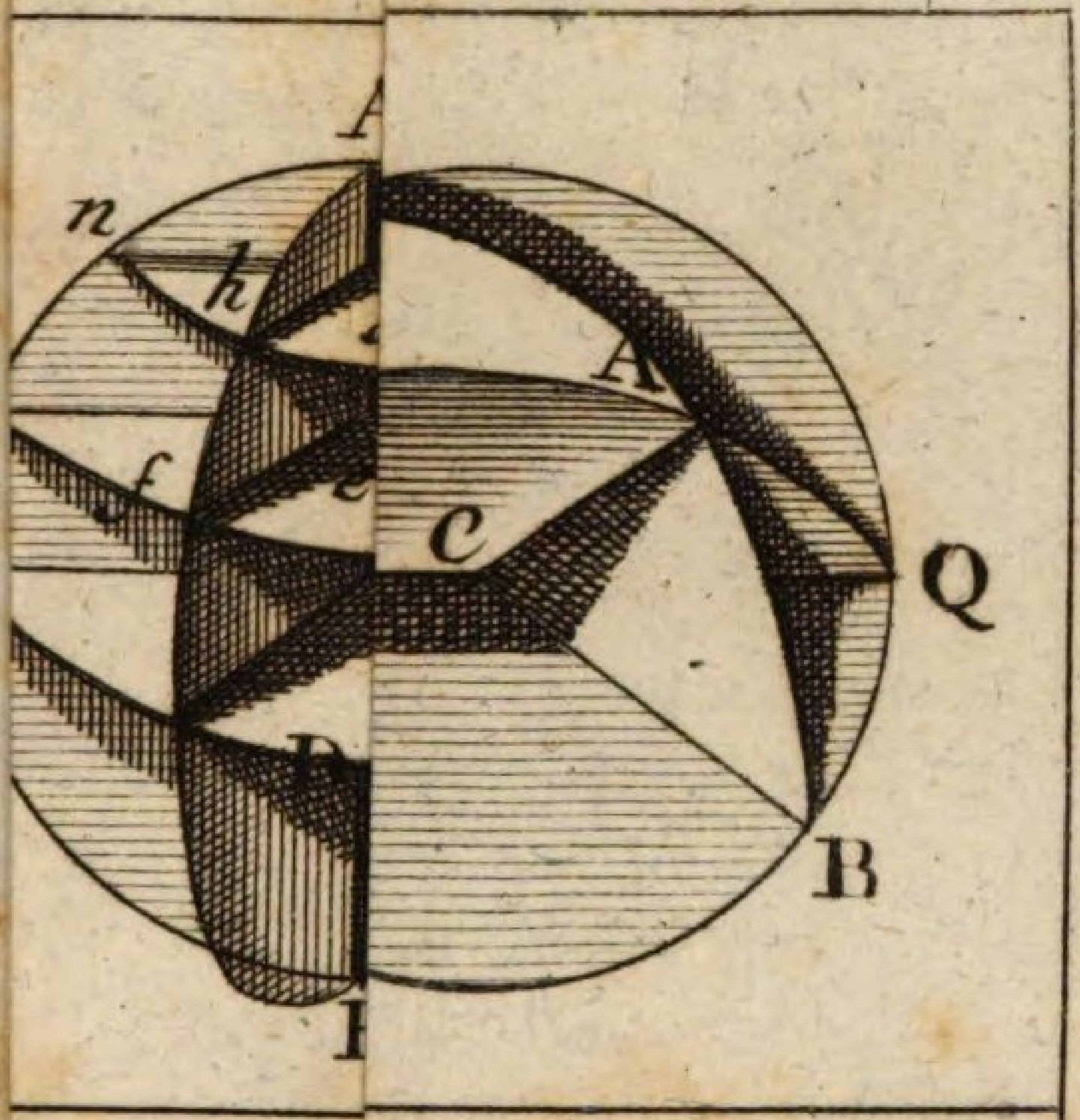
Errata.

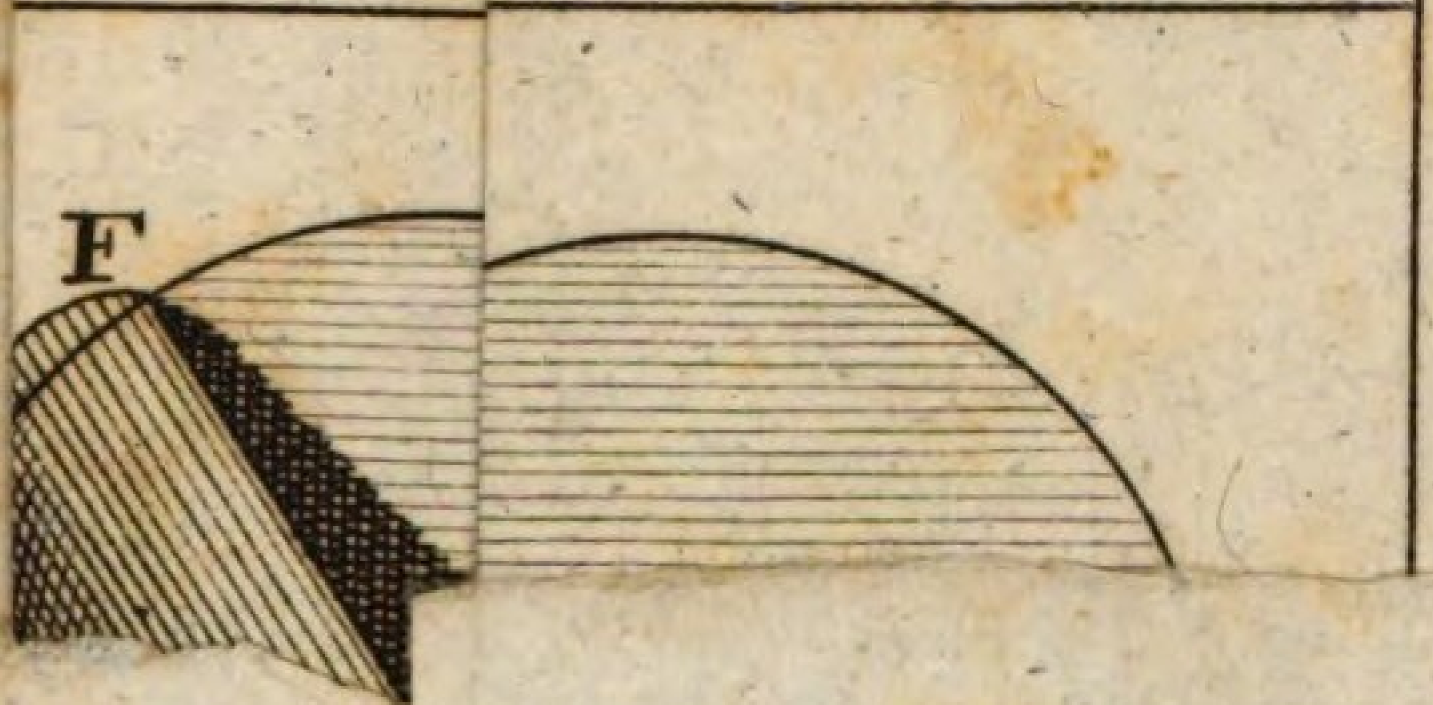
V. so oft dieses Zeichen vorkömmt, soll ein s. stehen, und sphärisch heißen.

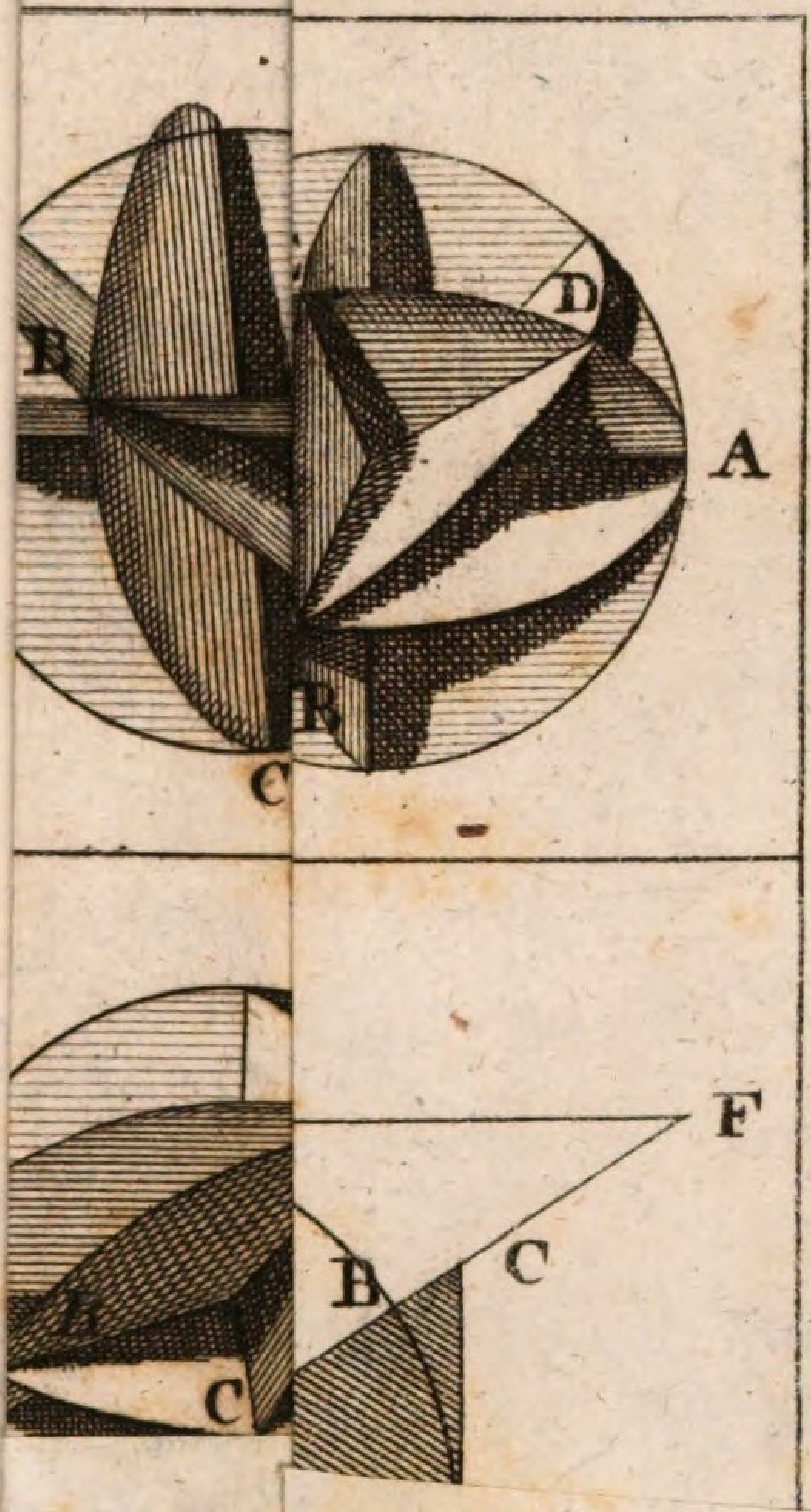
Seite	Zeile				
32.	16.	lies	n. 6.	n. 4.	
33.	3.		n. 6.		
	6.	statt	LG	lies	LE
	7.		LG		LE
	9.		LG		LE
	16.	lies	n. 7.	n. 9.	
34.	14.		n. 8.	n. 9.	
47.	24.	statt	EG	lies	EC
48.	2.		AF <		AF >
71.	17.		∫AE		∫CE
76.	21.		*sGI*		*sGK.*
77.	3.		*BGI*		*BEI*
	15.		*BC*		*AC*
80.	25.		§.		§. 94.
	27.		§.		§. 94.
86.	9.		*DOC*		*DOQ*
89.	19.		*sAC*		*sAQ*
92.	10.		§.		§. 135.
105.	27.		B		C
106.	1.		B		C
	2.		C		B
121.	13.		§.		§. 125.
	15.		§.		§. 127.
128.	17.		*s* AB		*sc* AB
140.	10.		h A		n A
	18.		und		als.


n
h
A
f
e
c
Q
D
B


F


A
n
h
A
f
C
Q
B


F


D
B
A
R
C
F
B
C
C

ad pag.

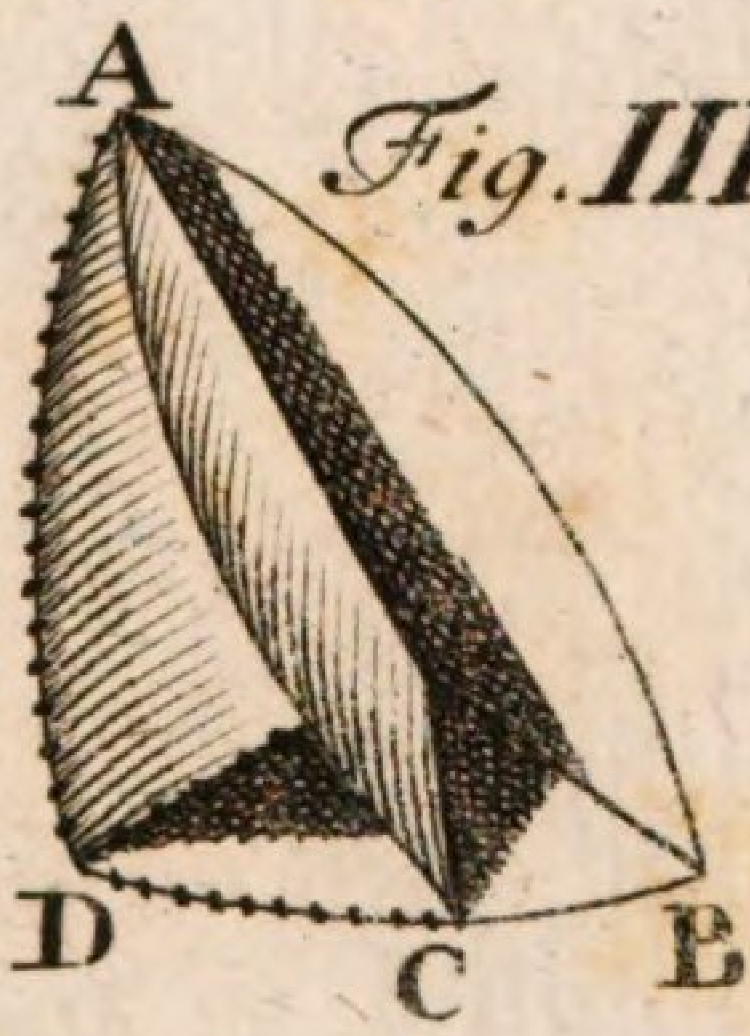
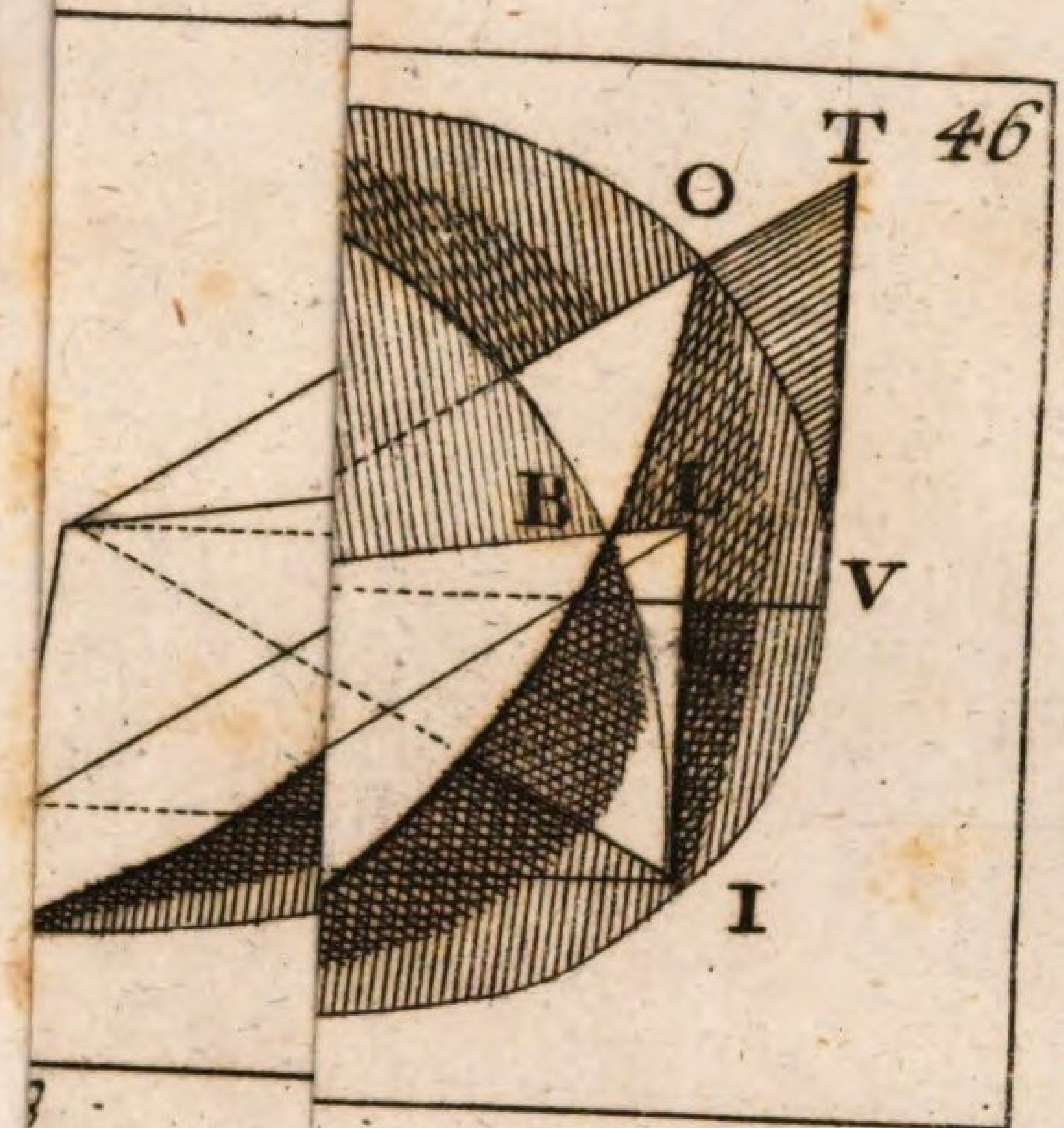
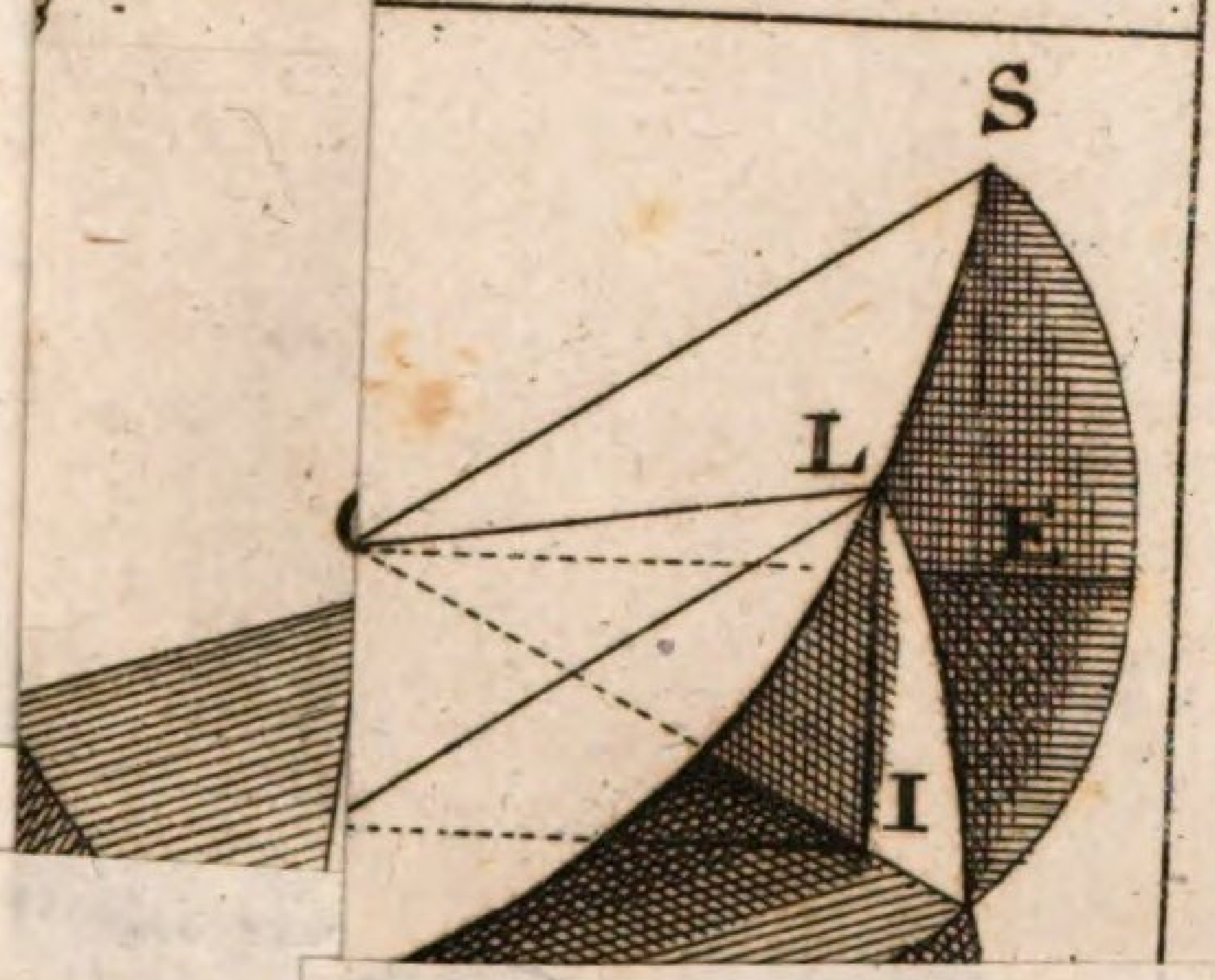


Fig. III.


46
T
O
B
L
V
I


S
L
E
I

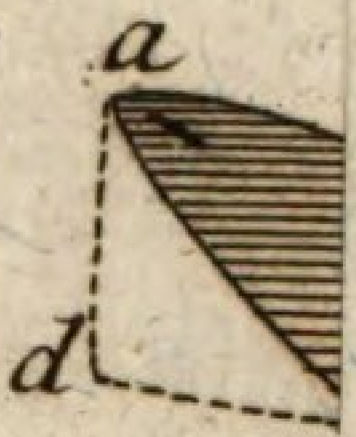
lysin

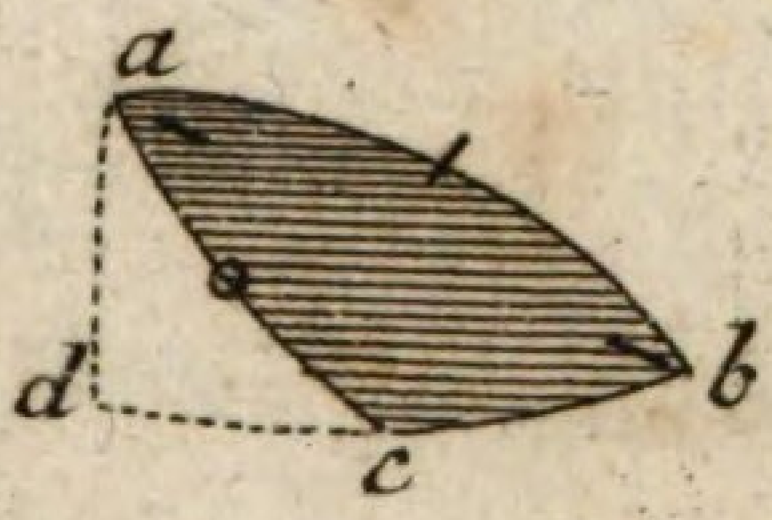
Fi

Fig: III.

d : ∫cad =

$\oint bad = tab\ tac$



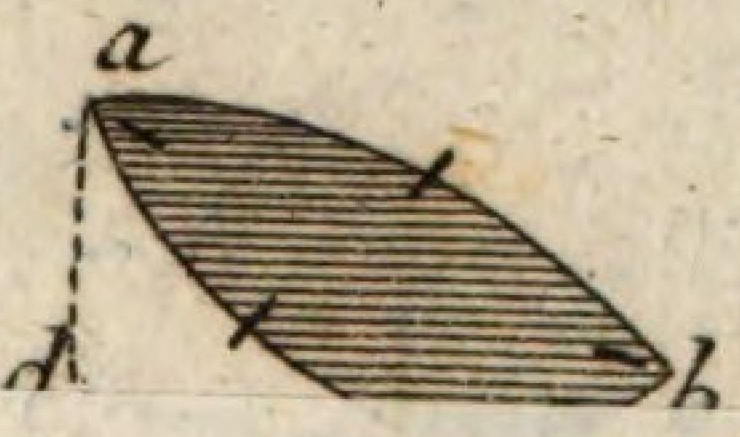


bad - b

$bad - bac = cad$

tab = ∮

$= \oint bd : \oint cd$



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lori, Michael,

Sphärische Trigonometrie mit V Kupfertafeln

Augsburg 1783

Math.p. 322
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082330-0
VD18 11194936-002